Clase 18:

Topología en $\mathbb{R}^n$

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Clasificar

$$\int_1^{+\infty} e^{1/x} - 1 - 1/x \, dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{(1/x)^2}{2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx$$

$$e^z - 1 \underset{z \to 0}{\sim} z$$

$z = 1/x$ $\quad e^z - 1 - z \sim \frac{z^2}{2}$

Converge

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + r_2(z)$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(z) = e^z$

$z_0 = 0$

$$f(z) = f(0) + f'(0)(z-0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (z-0)^2$$

$$+ \cdots \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (z-0)^n + r_n(z)$$

$f^{(n)}(z) = e^z$ $\quad f^{(n)}(0) = 1$

$$f(z) = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + r_n(z)$$

desarollo de Taylor alrededor del 0

$$\lim_{z \to 0} \frac{r_n(z)}{z^n} = 0$$

Norma en $\mathbb{R}^n$

Una función $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **norma** si verifica las siguientes propiedades

1) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \iff x = 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}^n$

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular) $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Ejemplos.

1) $|\ | : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x \in \mathbb{R}$ $\quad |x|$

2) $\|\ \|_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

3) $\|\ \|_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

4) $\|\ \|_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$ $\quad p \geq 2$ $\quad p \in \mathbb{N}.$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$$

5) $\|\ \|_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|.$$

¿Como podemos medir la distancia entre dos vectores de $\mathbb{R}^n$, x, y?

$$d(x,y) = \|\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}}{y-x}\|$$

Distancia en $\mathbb{R}^n$

Una distancia en $\mathbb{R}^n$ es una función

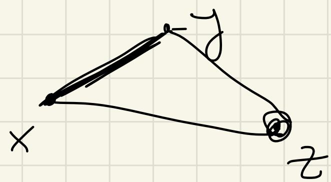
$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

1) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

(desigualdad triangular) $\forall z, x, y \in \mathbb{R}^n$



Una norma en $\mathbb{R}^n$ induce una distancia pero no toda distancia está inducida por una norma por ejemplo.

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Def: **Bola abierta** en $\mathbb{R}^n$

$a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ la bola abierta (entorno) de centro a y radio δ al conjunto

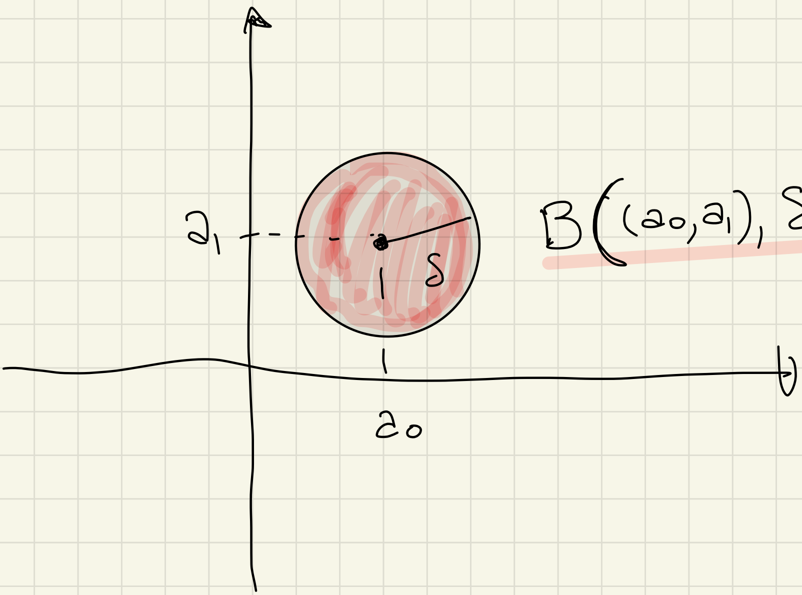
$$\boxed{B(a,\delta) = \{ x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) < \delta \}}$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Ejemplos:

1) $n=2$ $\quad \mathbb{R}^2$ $\quad \|\ \|_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$a = (a_0, a_1)$



$B((a_0, a_1), \delta)$.

$$B(a, \delta) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \| (x,y) - (a_0, a_1) \|_2 < \delta \}$$

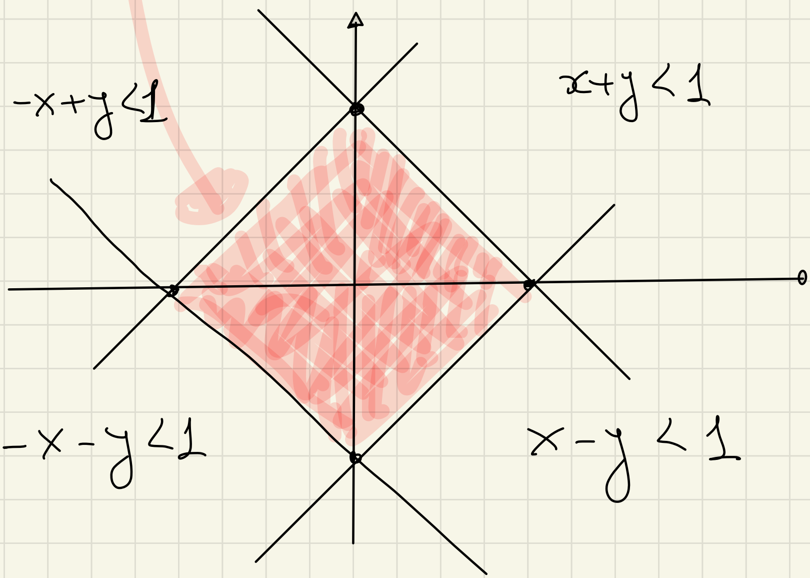
$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a_0)^2 + (y-a_1)^2} < \delta \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a_0)^2 + (y-a_1)^2 < \delta^2$$

2) En $\mathbb{R}^2$ nos tomamos $\| \|_1$.

$$B((0,0),1) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)-(0,0)\|_1 < 1 \}$$

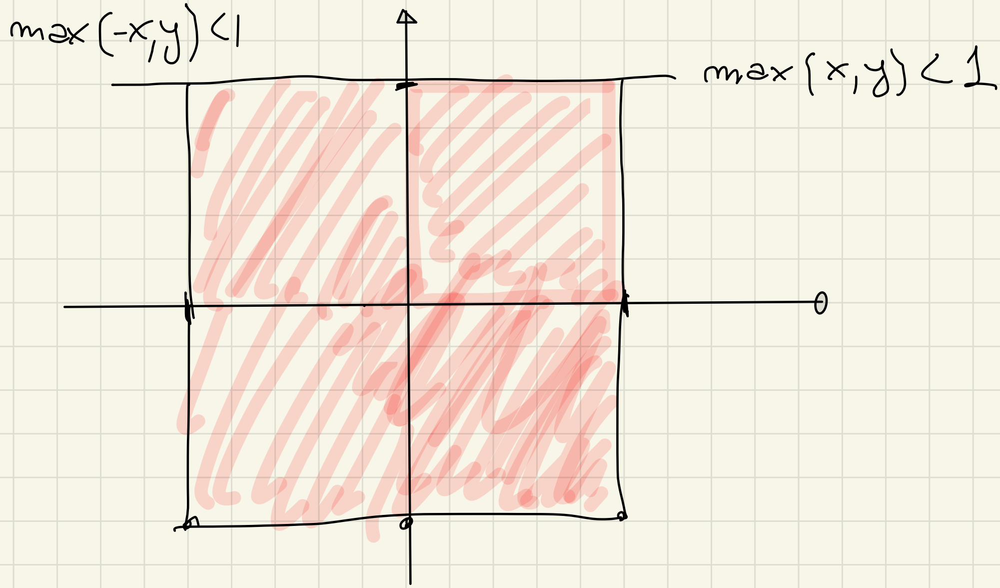
$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1 \}$$



3) En $\mathbb{R}^2$ nos tomamos $\| \|_\infty$

$$B((0,0),1) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_\infty < 1 \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} < 1 \}$$



$a \in \mathbb{R}^n$, $\| \ \|$ norma en $\mathbb{R}^n$

$\delta > 0$ (por defecto $\| \ \|_2$)

$$\boxed{B(a,\delta) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x - a \| < \delta \}}$$

bola de centro a y radio δ

$$\boxed{B^*(a,\delta) = B(a,\delta) - \{a\}}$$

bola reducida de centro a y radio δ

Sea A un conjunto en $\mathbb{R}^n$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$

- x_0 es interior a A si existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset A$

- x_0 es exterior a A si existe $\delta > 0$ tal que

$$B(x_0, \delta) \subset A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$$

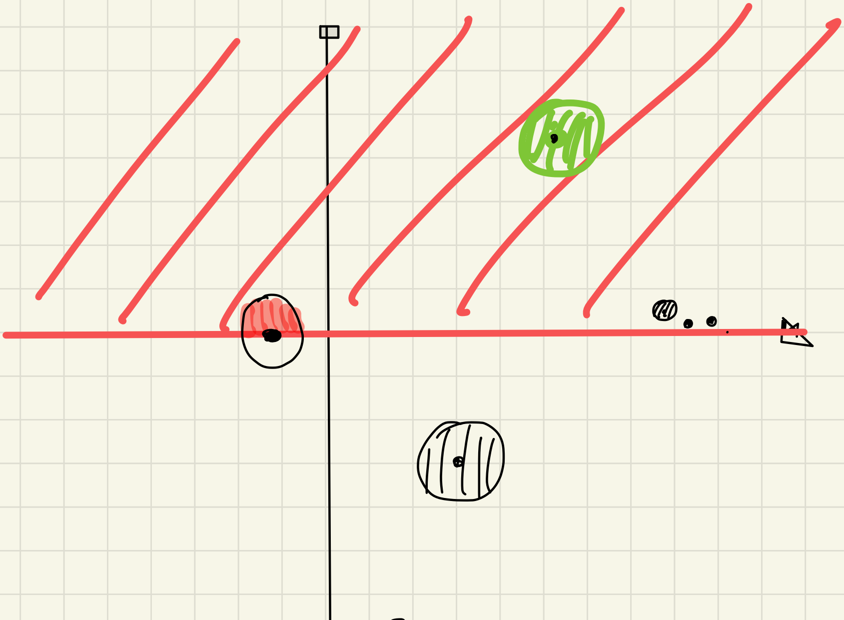
- x_0 es frontera de A si $\forall \delta > 0$

$$B(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset \quad \text{y}$$

$$B(x_0, \delta) \cap A^c \neq \emptyset$$

Ejemplo:

1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$.



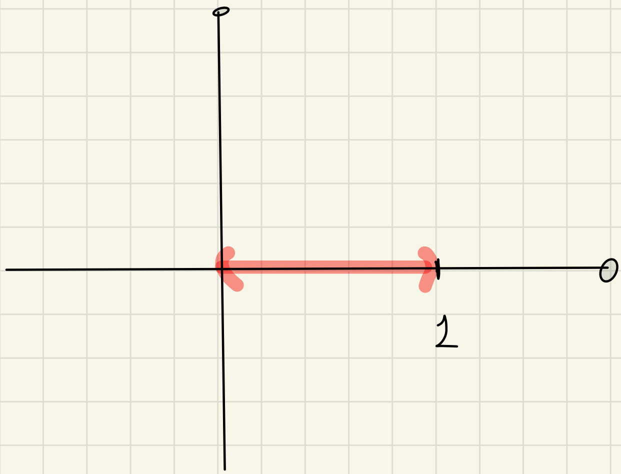
Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$b > 0$, $a \in \mathbb{R}$: (a,b) es interior

$b < 0$, $a \in \mathbb{R}$: (a,b) es exterior

$b = 0$, $a \in \mathbb{R}$: (a,b) es frontera

2) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \ y = 0\}$.



- No hay puntos interiores $\boxed{A^{\circ} = \emptyset}$
- Los puntos frontera son los (x,y) $0 \leq x \leq 1$ $y = 0$. $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y = 0\}}$$

$$\boxed{A^{ext} = (\partial A)^c}$$

3) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{array} \right\}.$

Hallar puntos interiores,

exteriores

frontera de A.