Clase 18

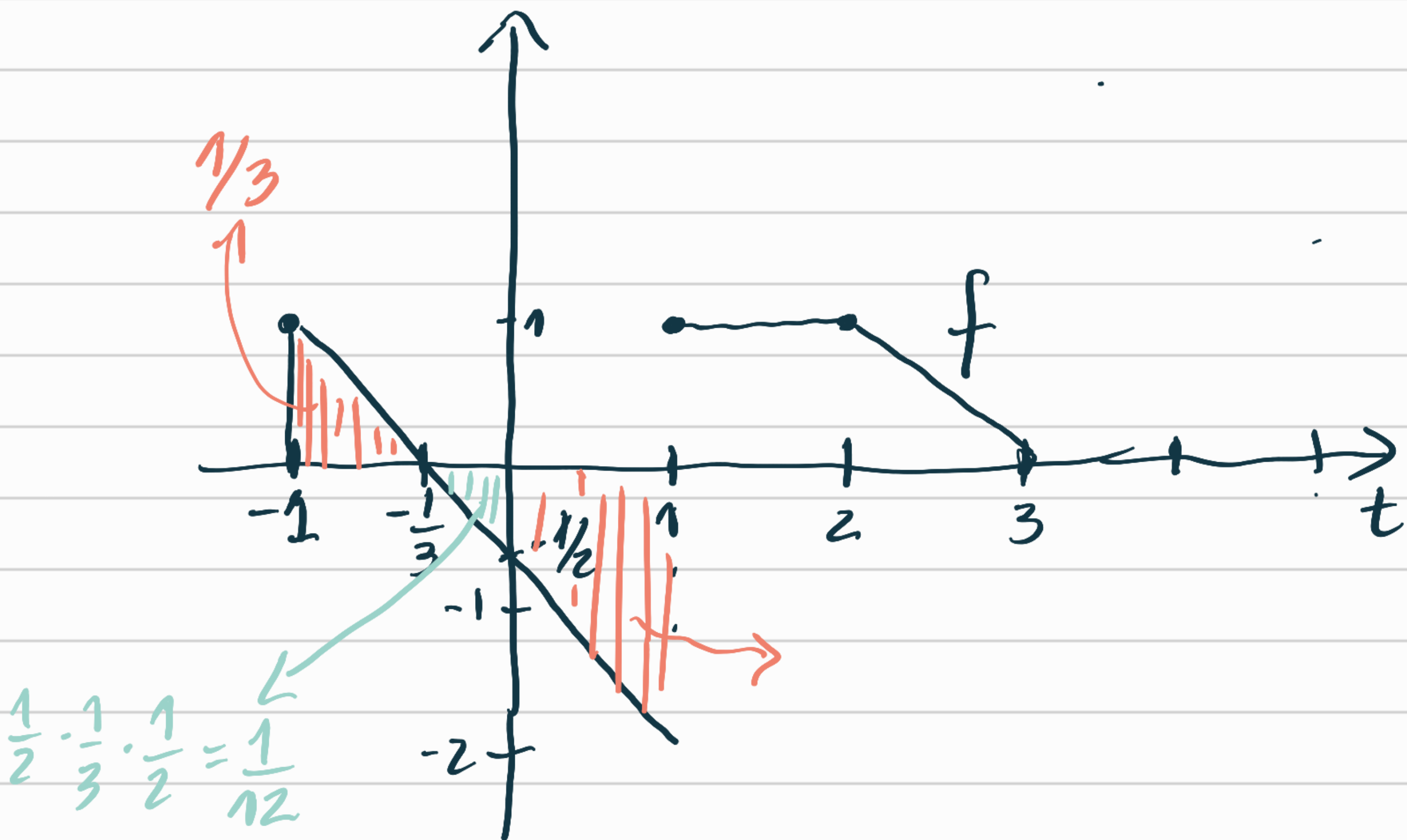
Clase pasada:

Ejemplo: Sea $f:[-1,6]\to\mathbb{R}$ /

$$f(t)=\begin{cases} -\frac{3}{2}\cdot t-\frac{1}{2} & \text{si } -1\leq t<1 \\ 1 & \text{si } 1\leq t\leq 2 \\ 3-t & \text{si } 2\leq t\leq 3 \end{cases}$$

(Obs: f es integrable en $[-1,1]$ y en $[1,3]$
$\Rightarrow f$ es integrable en $[-1,3]$.)

Sea $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.



i) Bosquejar F

ii) Hallar las raíces

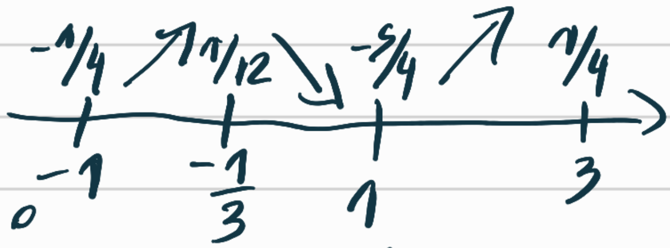
iii) Hallar el signo de F

iv) Decidir cuando F es creciente y decreciente

v) Hallar F.

<u>Solución</u>:

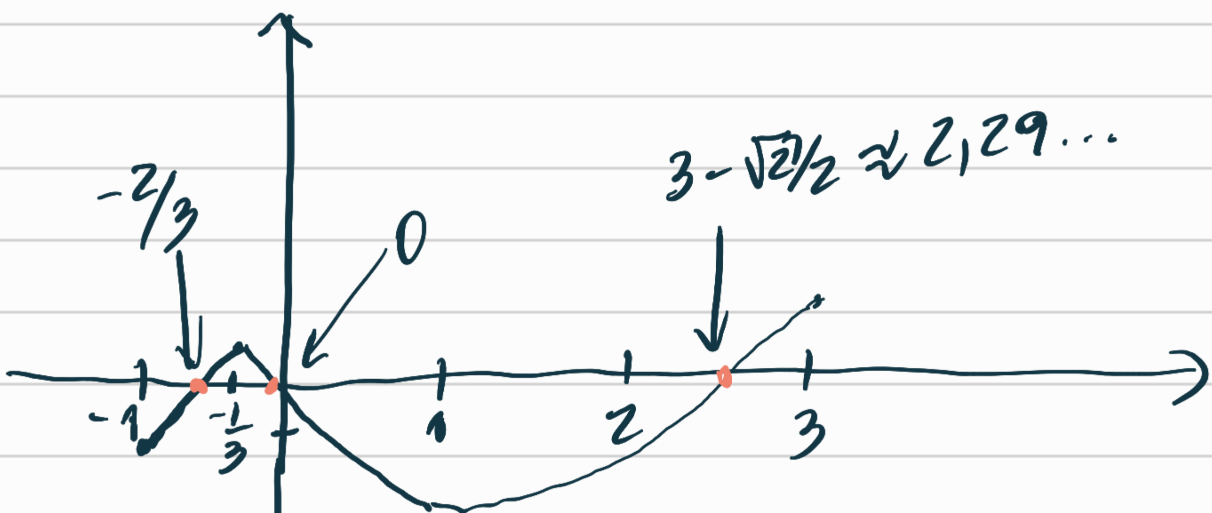
iv) Crecimiento de F:



<u>Obs.</u> $F(-1)=\int_0^{-1} f(t)\,dt = -\int_{-1}^{0} f(t)\,dt = -\left(1/3 - 1/12\right)$

$$= -\left(\frac{4}{12} - \frac{1}{12}\right) = -\frac{3}{12} = -\frac{1}{4}$$

$$F(-1/3) = \int_0^{-1/3} f(t)\,dt = -\int_{-1/3}^{0} f(t)\,dt = -(-1/12) = \frac{1}{12}$$



$$F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \left(-\tfrac{3}{2}\cdot t - \tfrac{1}{2}\right) dt$$

$-\tfrac{1}{2}\cdot 1$

$$= -\tfrac{3}{2}\cdot \int_0^1 t\,dt \; - \tfrac{1}{2}\int_0^1 1\,dt$$

$t\Big|_{t=0}^{t=1}$

$$= -\tfrac{3}{2}\cdot \frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=1} - \tfrac{1}{2}\cdot 1$$

$$= -\tfrac{3}{2}\cdot \tfrac{1}{2} \; - \tfrac{1}{2} \; = -\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{2}$$

$$= -\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$F(3) = \int_0^3 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt$$

$$= -\tfrac{5}{4} + \int_1^2 1\,dt + \int_2^3 (3-t)\,dt$$

$$= -\frac{5}{4} + 1 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2} = \frac{-5}{4} + \frac{6}{4} = \frac{1}{4}$$

v) Si $x \in [-1, 1)$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(-\tfrac{3}{2}.t - \tfrac{1}{2}\right) dt$$

$$= -\tfrac{3}{2}\int_0^x t\,dt - \tfrac{1}{2}\int_0^x 1\,dt$$

$$= -3/2 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=x} - 1/2 \cdot t\Big|_{t=0}^{t=x}$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot x$$

$$= -3/4 \cdot x^2 - 1/2 \cdot x$$

$$= -x\left(3/4\, x + 1/2\right) = 0 \quad \begin{cases} \nearrow x = 0 \ \checkmark \\ \searrow x = -2/3 \ \checkmark \end{cases}$$

Si $x \in [1,2]$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 (-3/2\, t - 1/2)\,dt + \int_1^x 1\,dt$$

$$= -5/4 + t\Big|_{t=1}^{t=x} = -5/4 + (x-1)$$

$$= -\frac{9}{4} + x$$

Si $x \in [2,3]$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \overbrace{\int_0^1 (-3/2 \cdot t - 1/2)\,dt}^{-5/4} + \overbrace{\int_1^2 1\,dt}^{1}$$

$$+ \int_2^x (3-t)\,dt$$

$$= -\frac{5}{4} + 1 + 3 \cdot \int_2^x 1\,dt - \int_2^x t\,dt$$

$$= -\frac{1}{4} + 3\cdot t\Big|_{t=2}^{t=x} - \frac{t^2}{2}\Big|_{t=2}^{t=x}$$

$$= -\frac{1}{4} + 3(x-2) - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + 3x - 6 - \frac{x^2}{2} + 2$$

$$= -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{17}{4}$$

$-1/2 \cdot x^2 + 3x - 17/4 = 0$

$2x^2 - 12x + 17 = 0$ $\nearrow$ $\frac{12+\sqrt{8}}{4} > 3$ ✗

$\searrow$ $\frac{12-\sqrt{8}}{4} = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✓

$\Delta = 144 - 4.2.17 = 8$

$$F(x) = \begin{cases} -3/4 \cdot x^2 - 1/2 \cdot x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 9/4 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -1/2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 17/4 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

iii)

x	-1		$-\frac{2}{3}$		0		$\frac{3-\sqrt{2}}{2}$		3
		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Continuidad

- Suma, producto y comp. de continuas es continua.
- Cociente de continuas es continua cuando el denominador no se anula.
- Primitivas de func. localmente integrables es continua (por ejemplo $\log(x)$).
- Polinomios son continuos.
- Funciones racionales $P(x)/Q(x)$ son continuas en x_0 si $Q(x_0) \neq 0$.
- Valor absoluto es continuo.
- Si f, g son continuas $\Rightarrow$ $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ son continuas (ejercicio).
- Funciones trigonométricas son continuas (más adelante).

Teoremas clásicos sobre continuidad:

- teo. de conservación del signo
- teo. de Bolzano
- teo. del valor medio.

implícito considera $x \in I$

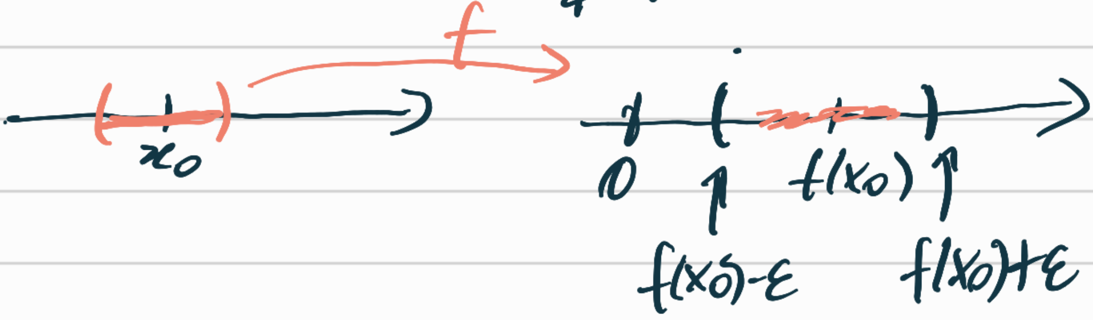
Teorema del conservación del signo:

Si $f: I \to \mathbb{R}$ continua en $x_0 \in I$.

i) Si $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q. $f(x) > 0$ si $|x - x_0| < \delta$

ii) Si $f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ t.q. $f(x) < 0$ si $|x - x_0| < \delta$.

<u>Dem.</u>



i) Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ Tomo $\varepsilon = f(x_0) > 0$

entonces existe $\delta > 0$ t.q. si $\underbrace{|x - x_0| < \delta}$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = f(x_0)$

$\Rightarrow 0 = f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

$\Rightarrow f(x) > 0 \quad , \forall x : |x - x_0| < \delta$ ✓

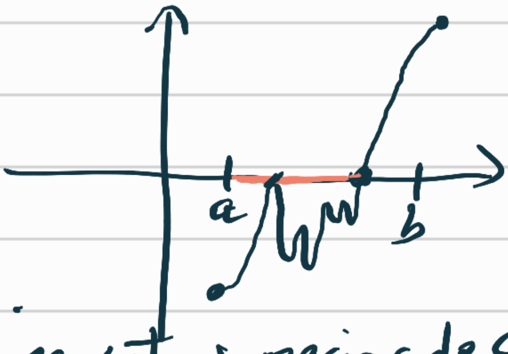
ii) Aplicar i) con $g(x) = -f(x)$.

Teorema de Bolzano: Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) / f(x_0) = 0$.

<u>Dem.</u> Caso $f(a) < 0 < f(b)$.

Consideramos el conjunto

$S = \{x \in [a,b] : f(x) \leq 0\}$



$S \neq \emptyset$: $a \in S$ pues $f(a) \leq 0$.

S acotado superiormente : b es cota superior de S.

$\Rightarrow \exists\ x_0 = \sup(S)$. Vamos a ver que $f(x_0)=0$.

Si $f(x_0)>0$: Por cons. del signo, $\exists\ \delta>0 /$
$f(x)>0 \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\Rightarrow (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap S = \phi$.

$\Rightarrow x_0 - \delta/2$ sería una cota superior de S, menor que $x_0 = \sup(S)$ ABSURDO!

Si $f(x_0)<0$: Por cons. del signo, $\exists\ \delta>0 /$
$f(x)<0 \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\Rightarrow (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq S$

$\Rightarrow x_0+\delta/2 \in S$ y $x_0+\delta/2 > x_0$ donde $x_0 = \sup(S)$ ABSURDO!

$\therefore f(x_0)=0$.

ii) Si $f(b)<0<f(a) \Rightarrow -f(a)<0<-f(b)$.

Puedo usar i) con $g(x)=-f(x)$. $\square$