Clase 17 - Límite y continuidad.

Clase anterior:

Ejercicio (Continuidad del logaritmo)

1) Probar que: $\frac{x-1}{x} \leq \log(x) \leq x-1$, $\forall x > 0$ ✓

2) Probar que $\log(x)$ es continua en $x=1$.

3) Probar que $\log(x)$ es continua en $(0,+\infty)$.

Solución: 1) Clase anterior.

2) Tenemos que probar $\lim_{x\to 1} \log(x) \overset{?}{=} \log(1) = 0$

Por el criterio del sandwich:

$$\underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\substack{\downarrow x\to 1 \\ 0}} \leq \log(x) \leq \underbrace{x-1}_{\substack{\downarrow x\to 1 \\ 0}} \Rightarrow \log(x) \to 0 \text{ si } x \to 1.$$

$\square$

3) Sea $x_0 > 0$ fijo. Queremos probar que
$\lim_{x\to x_0} \log(x) = \log(x_0)$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \left(\log(x) - \log(x_0)\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \log\left(x/x_0\right) = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \log\left(\frac{x}{x_0}\right) = \log\left(\lim_{x\to x_0} \frac{x}{x_0}\right) = \log(1) = 0 \quad \square$$

$\frac{x}{x_0} \to 1$

$\boxed{\log \text{ es cont. en } 1,\ \frac{x}{x_0} \to 1 \text{ si } x \to x_0}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Obs.}}\ \underbrace{\log\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)}_{\log(x)+\log\left(\frac{1}{x}\right)} = \log(1) = 0 \Rightarrow \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x) \\ \log(y/x) = \log(y) + \log(1/x) = \log(y) - \log(x) \end{array}}$$

Continuidad de las primitivas

Def. Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Decimos que f es localmente integrable si $\forall a, b \in I$ con $a < b$ tenemos que f es integrable en $[a, b]$.

Ejemplo: La función $f(t) = 1/t$ es localmente integrable en $(0, +\infty)$ pues si $[a, b] \subseteq (0, +\infty) \Rightarrow f$ es monótona en $[a,b]$ $\Rightarrow$ f es integrable en $[a,b]$.

Def. Si $f: I \to \mathbb{R}$ es localmente integrable y $a \in I$, podemos definir

$$F: I \to \mathbb{R} \ / \ F(x) = \int_a^x f(t)\,dt .$$

Decimos que F es una primitiva de f.

Ejemplo: $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$

$\Rightarrow$ $\log(x)$ es una primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

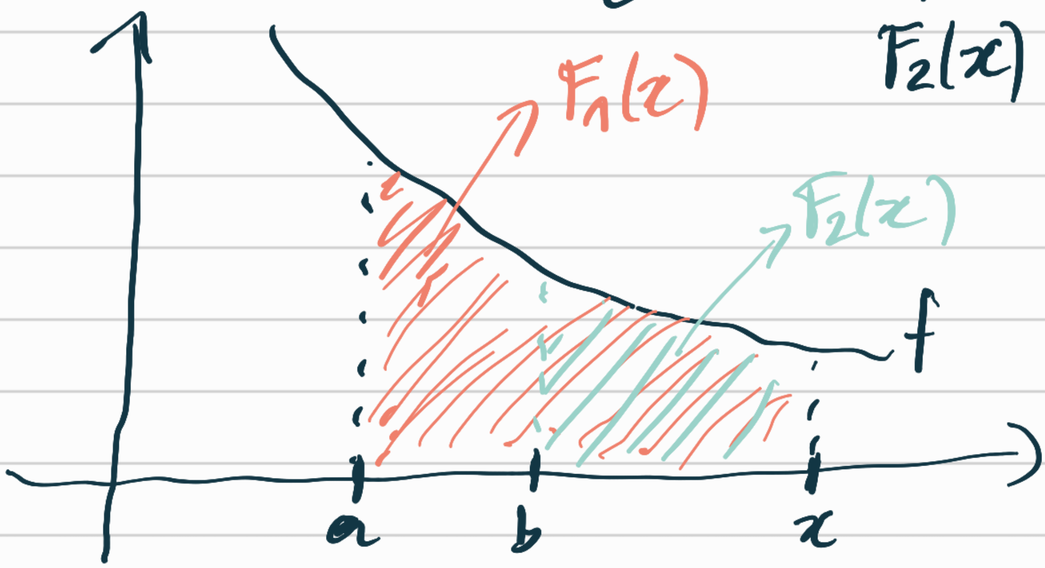
Obs. Si F_1 y F_2 son dos primitivas de f

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \ / \ F_1(x) = F_2(x) + c, \ \forall x \in I.$

Dem. Sabemos que $F_1(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

y $F_2(x) = \int_b^x f(t)\,dt$, con $a, b \in I$ fijos.

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_a^b f(t)\,dt}_{= C} + \underbrace{\int_b^x f(t)\,dt}_{= F_2(x)} \quad \checkmark$$



$$\boxed{\text{Recordar que } \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \quad \text{no importa el orden entre } a, b, c}$$

Proposición: Sea $f: I \to \mathbb{R}$ localmente integrable y $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de f.

i) Si $f \geq 0$ en $I \Rightarrow F$ es creciente en I

ii) Si $f \leq 0$ en $I \Rightarrow F$ es decreciente en I

Dem. i) Hay que probar que si $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \underbrace{\int_a^y f(t)\,dt}_{F(y)} + \int_y^x f(t)\,dt$$

$$\boxed{\text{Recordar: Si } f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t) \geq 0 \text{ si } a < b}$$

$$= F(y) - \underbrace{\int_x^y f(t)\,dt}_{\geq 0} \leq F(y).$$

ii) $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow -F(x) = \int_a^x -f(t)\,dt$

$\Rightarrow -F$ es una primitiva de $-f$

Como $f \leq 0$ en $I \Rightarrow -f \geq 0$ en I

$\underset{i)}{\Rightarrow} -F$ es creciente en I

$\Rightarrow F$ es decreciente en I. $\square$

Obs: Si $f: I \to \mathbb{R}$ es localmente integrable

$\Rightarrow f$ es integrable en $[a,b] \subseteq I$

$\Rightarrow f$ es acotada en $[a,b] \subseteq I$.

(En particular, si $c \in I \Rightarrow f$ es acotada en algun entorno de c contenido en I)

Teo (Continuidad de las primitivas).

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ loc. integrable, $a \in I$

y $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F$ es continua en I.

Dem. Sea $x_0 \in I$, queremos probar que

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0).$$

Dado $\varepsilon > 0$, queremos hallar $\delta > 0$ tal que

si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$,

Obs. $F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow |F(x)-F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_{\min\{x_0,x\}}^{\max\{x_0,x\}} f(t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_{\min\{x_0,x\}}^{\max\{x_0,x\}} \underbrace{|f(t)|}_{\substack{\leq \\ M}} \,dt \quad \rightarrow \text{si } |x-x_0|<\delta'$$

Como f es loc. integrable, entonces es acotada en un entorno de x_0. Es decir,

$\exists\, \delta' > 0 \,/\, \text{si } |x-x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x)| \leq M$

tomamos $\delta = \min\{\delta', \varepsilon/M\}$: si $|x-x_0|<\delta$

$\Rightarrow |f(t)| \leq M \quad \forall t \in E(x_0,\delta)$

Como $\min\{x_0,x\}, \max\{x_0,x\} \in E(x_0,\delta)$

$\Rightarrow |f(t)| \leq M \quad \forall t \in [\min\{x_0,x\}, \max\{x_0,x\}]$

$$\Rightarrow \int_{\min\{x_0,x\}}^{\max\{x,x_0\}} |f(t)|\,dt \leqslant \int_{\min\{x_0,x\}}^{\max\{x,x_0\}} M\,dt = M\,|x-x_0|$$

$$\underset{\boxed{\delta \leqslant \varepsilon/M}}{<} M \cdot \varepsilon/M < \varepsilon \quad \checkmark$$

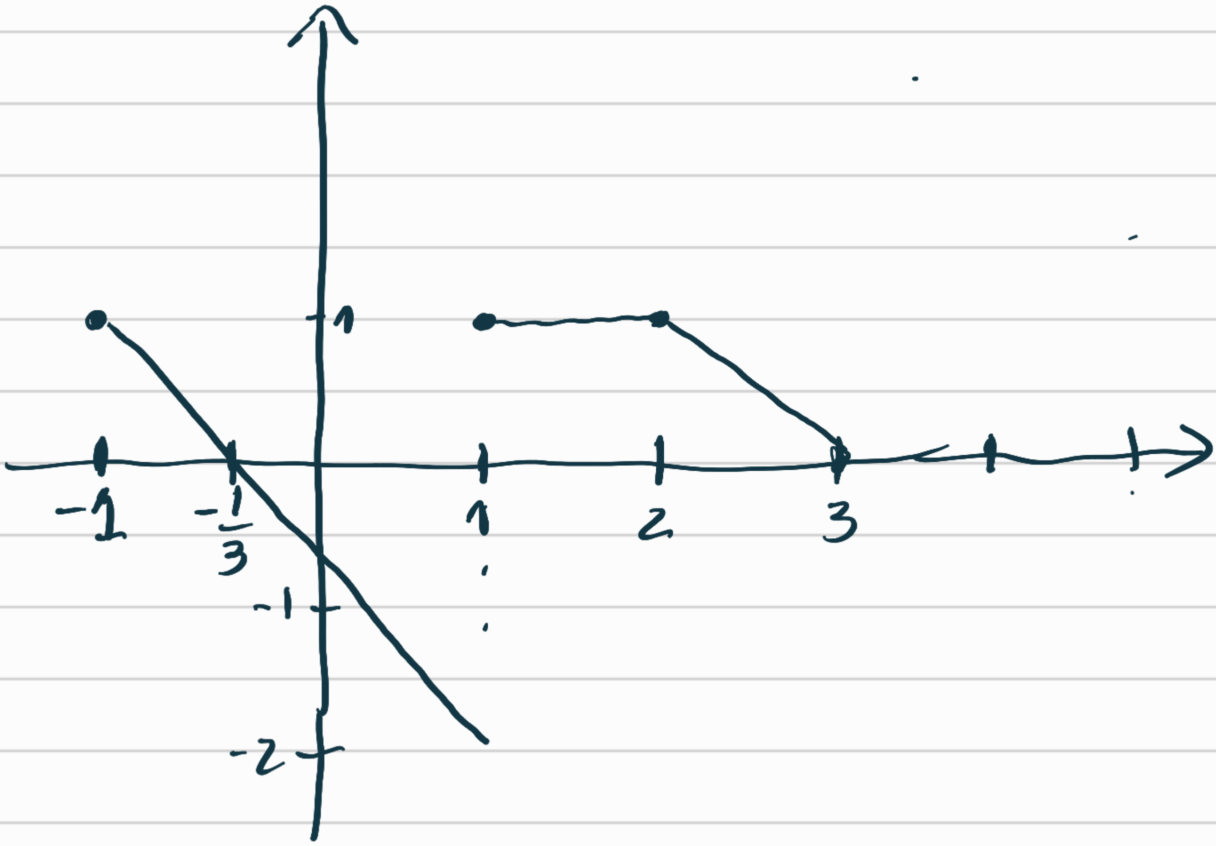
<u>Corolario</u>: $\log(x)$ es continua pues es la primitiva de $1/x$.

<u>Ejemplo</u>: Sea $f:[-1,6]\to\mathbb{R}$ /

$$f(t) = \begin{cases} \underline{-3/2 \cdot x - 1/2} & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leqslant 2 \\ 3-x & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

(<u>Obs</u>: f es integrable en $[-1,1]$ y en $[1,3]$
$\Rightarrow f$ es integrable en $[-1,3]$.)

Sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.



i) Bosquejar F

ii) Hallar las raíces

iii) Hallar el signo de F

iv) Decidir cuando F es creciente y decreciente

v) Hallar F.