Solución prueba intermedia - 20 de Septiembre de 2022

Nombre	Cédula	Grupo	Nota

Ejercicio 1 *(7 puntos) Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación:*

$$\left|x^2 - 6x + 5\right| \geq 3$$

Solución Las raíces del polinomio $x^2 - 6x + 5$ son 1 y 5 y separamos al conjunto de los números reales en dos zonas:

1. Zona 1
$$(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$$
2. Zona 2
$$(1, 5)$$

Resolveremos la inecuación en cada zona y luego uniremos ambas soluciones.
Zona 1. La inecuación queda $x^2 - 6x + 5 \geq 3$ y por lo tanto $x^2 - 6x + 2 \geq 0$. Hallando las raíces y el signo de dicho polinomio obtenemos que la inecuación se verifica en:

$$Sol_1 = (-\infty, 3 - \sqrt{7}] \cup [3 + \sqrt{7}, +\infty)$$

Zona 2. La inecuación queda $-x^2 + 6x - 5 \geq 3$ y por lo tanto $-x^2 + 6x - 8 \geq 0$. Hallando las raíces y el signo de dicho polinomio obtenemos que la inecuación se verifica en:

$$Sol_2 = [2, 4]$$

Finalmente, el conjunto solución de la inecuación es:

$$Sol = (-\infty, 3 - \sqrt{7}] \cup [2, 4] \cup [3 + \sqrt{7}, +\infty)$$

Ejercicio 2 *(6 puntos) Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación:*

$$(2^x)^x \, 4^3 = (2^x)^5$$

Solución Por un lado tenemos que $(2^x)^x \, 4^3 = 2^{x^2}(2^2)^3 = 2^{x^2+6}$. Por otro lado, $(2^x)^5 = 2^{5x}$ y operando obtenemos que $2^{x^2-5x+6} = 1$ por lo cual debemos hallar las raíces del polinomio $x^2 - 5x + 6$ que son $x = 2$ y $x = 3$.
En conclusión $Sol = \{2, 3\}$

Ejercicio 3 *(8 puntos)*

1. *Dados tres conjuntos A, B y C, probar que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.*
(Se pueden utilizar las propiedades vistas en el práctico).

Solución $A \setminus (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c = A \cap (B^c \cup C^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

2. *Considere los conjuntos:*

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \quad 1 \leq x \leq 6\}, \quad B = \{1,\ 3,\ 5,\ 8,\ 9\} \quad y \quad C = \{x^2 : \quad 1 \leq x \leq 3;\ x \in \mathbb{N}\}$$

Hallar $A \setminus (B \cap C)$ *y* $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ *y verificar que son iguales.*

Solución Primero escribamos a los conjuntos A y C por extensión: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{1, 4, 9\}$.
Por un lado, $B \cap C = \{1, 9\}$ y luego $A \setminus (B \cap C) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.
Por otro lado, $(A \setminus B) = \{2, 4, 6\}$, $(A \setminus C) = \{2, 3, 5, 6\}$ y por lo tanto $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ejercicio 4 *(9 puntos) Considere la siguiente implicación:*

$$\boxed{\textit{En } \mathbb{N} : \textit{ si } n+3 \textit{ es un número par, entonces } n \textit{ es impar}}$$

1. *Enunciar el recíproco.*
   Solución *En* $\mathbb{N}$: *Si* n *es impar entonces* $n + 3$ *es par.*

2. *Enunciar el contrarrecíproco.*
   Solución *En* $\mathbb{N}$: *Si* n *es par entonces* $n + 3$ *es impar.*

3. *Demostrar que en* $\mathbb{N}$: $n + 3$ *es un número par* $\Leftrightarrow$ n *es impar.*
   (Sugerencia: recordar que hay que probar la doble implicancia).
   Solución *(*$\Rightarrow$*)Supongamos que* $n + 3$ *es par, entonces* $n + 3 = 2k$ *para* $k \in \mathbb{N}$ *y por lo tanto* $n = 2k - 3 = 2(k - 2) + 1$ *y por lo tanto* n *es impar.*
   ($\Leftarrow$*) Supongamos que* n *es impar, entonces* $n = 2k+1$ *para algún* $k \in \mathbb{N}$*, luego* $n+3 = 2k+4 = 2(k+2)$ *y por lo tanto* $n + 3$ *es par.*