

Capítulo 5

Funciones continuas

1. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Probar que la función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ es continua.

2.

a) Probar que una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple la propiedad de Lipschitz es continua.

b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Probar que la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ es continua.

3. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $c < d$. Bosquejar, si es posible, una función continua que cumpla:

a) $f : (a, b) \rightarrow [c, d], f((a, b)) = (c, d)$ b) $f : (a, b) \rightarrow [c, d], f((a, b)) = [c, d]$

c) $f : [a, b] \rightarrow [c, d], f([a, b]) = (c, d)$ d) $f : [a, b] \rightarrow [c, d], f([a, b]) = [c, d]$

e) $f : [a, b] \rightarrow [c, d], f([a, b]) = (c, d)$ f) $f : (a, b) \rightarrow [c, d], f((a, b)) = (c, d)$

g) $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f((a, b)) = \mathbb{R}$ h) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f([a, b]) = \mathbb{R}$

i) $f : \mathbb{R} \rightarrow [c, d], f(\mathbb{R}) = (c, d)$ j) $f : \mathbb{R} \rightarrow [c, d], f(\mathbb{R}) = [c, d]$

k) $f : [a, b] \rightarrow [c, d], f([a, b]) = \left[c, c + \frac{d-c}{4} \right) \cup \left(d - \frac{d-c}{4}, d \right]$

l) $f : \left[a, a + \frac{b-a}{4} \right) \cup \left(d - \frac{d-c}{4}, d \right] \rightarrow [c, d], f\left(\left[a, a + \frac{b-a}{4} \right) \cup \left(d - \frac{d-c}{4}, d \right] \right) = [c, d]$

5.1. Teorema de Bolzano

1. Existencia de soluciones

- a) Demuestre que la ecuación dada $x + 2\cos(x) = 0$ tiene al menos una solución.
 b) En los siguientes casos, hallar un entero n para el cual existe x tal que $n \leq x \leq n + 1$ y $f(x) = 0$:

a) $x^3 - x + 3$ b) $x^5 + 5x^4 + 2x + 1$ c) $x^5 + x + 1$ d) $x + e^x$

- c) Demostrar que existe un número x tal que:

a) $\sin(x) = x - 1$ b) $5\sin(x) = \cos(x)^2$

c) $x^{117} + \frac{534}{1 + x^2 + \sin^2(x)} = 1212$ d) $x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \sin^2(x)} = 119$

e) $\sqrt{x-5} = \frac{1}{x+3}$

- d) Mostrar que para todo par $A, B \in \mathbb{R}^+$ la función $f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ tiene una raíz.
 e) Probar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo $(1,2)$:

$$x\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) - 5 = \log(x) - e^x$$

- f) Considere la ecuación $1 - \frac{x^2}{4} = \cos(x)$.

- 1) Muestre que tiene al menos una solución.
- 2) Muestre que tiene al menos dos soluciones.
- 3) Muestre que tiene al menos tres soluciones.

2. Sea $g : [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que: $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ -2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

- a) Prueba que g no se encuentra en las hipótesis del Teorema de Bolzano en el intervalo $[-3, 4]$.
 b) Prueba de todas formas que g tiene una única raíz en dicho intervalo.

3. Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Si $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$ demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$
 4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que existe un par $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f(a) < 0 < f(b)$. Sea A el conjunto definido por $A = \{y > a : f(z) < 0 : \forall z \in [a, y]\}$. Probar que A está acotado, no tiene máximo y $\sup(A)$ es una raíz de f .

5. Puntos fijos

Dada f una función, un punto fijo de f es un valor c tal que $f(c) = c$. Notar que una función puede tener varios puntos fijos, uno solo o ninguno.

- Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Probar que f tiene al menos un punto fijo.
- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y monótona decreciente. Probar que f tiene exactamente un punto fijo.
- De un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sin puntos fijos.

6. Polinomios

- Dado un polinomio P decimos que una raíz ha sido separada si se ha encontrado un intervalo $[a, b]$ que contiene esta raíz y ninguna otra. Separar las raíces reales de cada uno de los siguientes polinomios (todos tienen 4 raíces).

Comentarios: Estudiar $P\left(\frac{n}{2}\right)$ para $n \in \mathbb{Z}$

$$a) \quad 3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8 \quad b) \quad x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2$$

- Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.
- Mostrar que la paridad de la cantidad de raíces contadas con multiplicidad es igual a la paridad del grado del polinomio.
- Sea $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\phi(x)}{x^n}$$

Probar que si n es impar, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n + \phi(x) = 0$.

7. Integrales

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua e integrable (más adelante se verá que esta hipótesis es redundante).

- Dados $a < b$, probar que si f es no negativa y $\int_a^b f(t) dt = 0$ entonces la función f es 0 en el intervalo $[a, b]$.
- (Valor medio)
 1. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c)(b - a) = \int_a^b f(t) dt$
 2. ¿El c de la parte anterior es único? Justificar su respuesta.
 3. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ no es continua ¿vale la conclusión de la primera parte? Justificar su respuesta

- c) Si f continua es tal que $\int_{-2}^1 f(t) dt = 3$, entonces se cumple necesariamente que:
- (A) $f(\alpha) = 1, \forall \alpha \in [-2, 1]$.
 (B) $f(\alpha) < 2, \forall \alpha \in [-2, 1]$.
 (C) $\exists \alpha \in [-2, 1]$ tal que $f(\alpha) = -3$.
 (D) $\exists \alpha \in [-2, 1]$ tal que $f(\alpha) = 1$.
 (E) $f(\alpha) > \frac{1}{2}, \forall \alpha \in [-2, 1]$.
- d) Sea $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Probar que si $\text{máx}(F) = F(c)$ para algún $c \in (a, b)$ entonces $f(c) = 0$
8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $x \leq f(x) \leq x + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $f(\mathbb{R})$.
- 9.
- a) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es continua y $f(x)$ es entero para todo x . ¿Qué puede decirse acerca de f ?
- b) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f es continua y $f(x)$ es racional para todo x . ¿Qué puede decirse acerca de f ?
- c) Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas que cumplen $f(r) = g(r), \forall r \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
- 10.
- a) Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tal que $x^2 + (f(x))^2 = 1$. Demuestre que o bien $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ o bien $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$
- b) ¿Cuántas funciones continuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hay que satisfagan $(f(x))^2 = x^2$?

5.2. Teorema de Weierstrass

1. Para las siguientes funciones determinar cuáles están acotadas inferior o superiormente y, en caso de estarlo, si tienen mínimo y máximo respectivamente.

a) $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ b) $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

c) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ d) $f : (3, 5) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$

e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$ f) $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$

2. Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) > 0, x \in [0, 2]$ y $\int_0^2 f(t) dt = 10$

- a) Supongamos además que $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y acotada con máximo M y mínimo m . Probar que

$$10m \leq \int_0^2 f(t)g(t) dt \leq 10M.$$

- b) Deducir que $10 \leq \int_0^2 (3t^2 + 1)e^t dt \leq 10e^2$.

- c) Deducir que $10 \leq \int_0^2 (3t^2 + 1)e^{t^2} dt \leq 10e^4$.

3. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *periódica* si existe $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ejemplos de estas funciones son sin y cos.

Probar que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y periódica, entonces f tiene mínimo y máximo.

4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio. Probar que existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $|f(y)| \leq |f(x)| \forall x \in \mathbb{R}$.
5. En este ejercicio se trabajará con el problema de la existencia de extremos de funciones continuas con dominio \mathbb{R} (donde no podemos aplicar el teorema de Weierstrass).

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar o dar un contraejemplo de las siguientes afirmaciones

- a) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo y mínimo.

- b) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo o mínimo.

- c) Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo y mínimo.

- d) Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo o mínimo.

- e) Si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, entonces f tiene máximo.

- f) Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, entonces f tiene máximo.

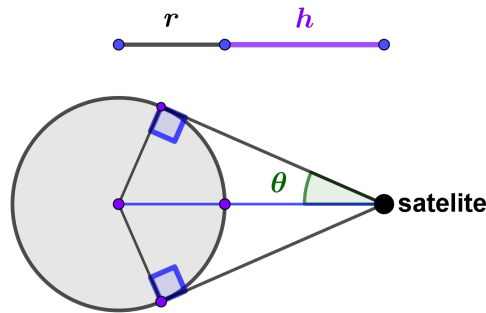
6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente y sobreyectiva. Probar que la función $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

5.3. Aplicaciones

1. Sea F la función que le asigna a cada punto del planeta tierra su temperatura, asumamos que la tierra tiene forma esférica perfecta, y que la función F es continua.

Discutir si la siguiente afirmación es verdadera: Existen dos puntos antipodales (diametralmente opuestos en la esfera) que tienen la misma temperatura.

2. Cuando un satélite explora la Tierra, solo tiene acceso a una parte de la superficie. Alguno de ellos cuentan con sensores que pueden medir un ángulo θ como se muestra en la figura.



donde r es el radio de la Tierra, h la distancia del satélite a la superficie terrestre y θ el ángulo entre el segmento que une el satélite y el centro de la Tierra con el segmento tangente a la tierra que pasa por el satélite.

El radio de la Tierra es de 6371 km aproximadamente.

- Calcular h para que $\theta = \frac{\pi}{3}$.
 - Sea $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función que le asigna a cada h su θ correspondiente. Calcular $\lim_{h \rightarrow +\infty} F(h)$ y deducir $Im(F)$.
 - Los satélites de navegación global, como el GPS, orbitan entre 20000 y 35786 km de altura. Determinar los ángulos mínimos y máximos para estos h y comparar con $\lim_{h \rightarrow +\infty} F(h)$.
3. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0 . El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud periodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo $t_0 + 12$ horas. Demuestre que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.
4. Suponga que tiene un resorte colgando desde el techo, y lo estira hacia abajo. ¿Es cierto que algún punto del resorte quedará en su posición original? Suponga que tiene un resorte sobre una superficie lateral (digamos una mesa) y lo contrae desde los extremos, aplicando fuerza similar, pero sin saber si es igual o no ¿Es cierto que algún punto del resorte quedará en su posición original?
5. **Distancia a una curva**
- Sean f un función continua en $[a, b]$, y sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que existe un punto en la gráfica de f que es el que está más cerca al punto $(x, 0)$, en otras palabras, existe

un t de $[a, b]$ tal que la distancia de $(x, 0)$ a $(t, f(t))$ es menor igual que la distancia $(z, f(z))$ para todo z de $[a, b]$. Recordar que la distancia entre dos puntos del plano $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ es $d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$.

- b) Muestre que este resultado no es cierto si $[a, b]$ se sustituye por (a, b) .
 c) Demuestre que el resultado es cierto si $[a, b]$ se sustituye por \mathbb{R} .

5.4. Complementarios

1. Dé ejemplos de polinomios de grado 2, digamos P y Q tales que $P(x) \neq Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sean P, Q dos polinomios de grado impar, tales que $P(x) \neq Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Qué relación puede deducir de estos polinomios en cuanto a sus grados y coeficientes?

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Probar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$.

3. Funciones convexas

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa.

a) Probar que f no tiene máximo.

b) Probar que f es continua.

c) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convexa.

1) Probar que f es continua en (a, b) .

2) Dé un ejemplo de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convexa tal que no es continua en a y no es continua en b .

4. Demuestre que no existe una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la preimagen de cada punto tenga 2 valores, es decir $\#f^{-1}(y) = 2$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

5. Topología I

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto *abierto*.¹

Probar que $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto.

6. Topología II

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

a) Probar que $f([a, b])$ es un intervalo cerrado. De un ejemplo de función continua tal que $f((0, 2))$ sea un intervalo cerrado.

¹Decimos que A es *abierto* si $\forall a \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $E(a, \varepsilon) \subset A$.

b) Probar que dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se tiene que $J = f(I)$ también es un intervalo.

c) Probar que la función

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Verifica el punto anterior pero no es continua.

7. Topología III

La idea de este ejercicio es ver de forma intuitiva cómo funciones continuas pueden tener inversas no continuas, cuando consideramos espacios distintos de intervalos.

a) Sea $f : [0, 2) \cup (4, 10] \rightarrow [0, 10]$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Probar que f es biyectiva y continua.

Calcular f^{-1} . Probar que f^{-1} no es continua.

b) Se considera la función $f : [0, 4) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ (1, t-1) & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ (3-t, 1) & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ (0, 4-t) & \text{si } 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

Observar que f es inyectiva y que la imagen de f es el cuadrado de vértices opuestos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Dado $t_0 \in [0, 4)$ calcular la función $g(t) = d(f(t), f(t_0))$ (la distancia de $f(t)$ a $f(t_0)$)

Probar que la función g es continua. Esto muestra, de forma intuitiva que la función f es continua ($f(x)$ está cerca de $f(x_0)$ si x está cerca de x_0).

Mostrar que para todo $\delta > 0$ existen $y_1, y_2 \in \text{Im}(f)$ tal que $d(y_0, y_1) < \delta$ pero $d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) > 3$. Esto muestra de forma intuitiva que f^{-1} no es continua.