Práctico 2 – Modelización Numérica de la Atmósfera

Entrega miércoles 27 de setiembre 2023 (Ejercicios 1 y 2)

Ecuación de advección lineal 1D con corriente uniforme $\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} = 0$ (1)

1) Se considera la ecuación de advección lineal 1D de una magnitud pasiva (***q***) con corriente uniforme (***U***) en un dominio periódico. La condición inicial consiste en la suma de **tres** funciones armónicas de distinto número de onda, amplitud y fase a elección.

La grilla es equi-espaciada de **1.000 puntos**. Se elige el intervalo de tiempo de modo que el número sea **C = 0.5**. **Implementar** dos EDF: Euler en el tiempo + Upstream en el espacio y Leapfrog en el tiempo y centrada de segundo orden en el espacio.

Advectar una vuelta exacta a la condición inicial y, para cada esquema, se pide:

a) Examinar la condición final y comentar.

b) Verificar la conservación o no de la integral de **q** y $\mathbf{q^2}$ en el dominio

c) Descomponer la solución inicial y final en funciones armónicas y comentar.

d) Graficar la evolución del error medio cuadrático respecto a la solución exacta para un rango de valores de **C**

2) Queremos construir esquemas de discretización usando 4 puntos, dos aguas arriba (**-2**, **-1**), el punto local **0** y un punto aguas abajo (**+1**), de tal manera que la discretización de (1) la escribimos de la forma:

$$q_0^{n+1} = a_{-2}.\, q_{-2}^n + a_{-1}.\, q_{-1}^n + a_0.\, q_0^n + a_1.\, q_1^n \quad (2)$$

a) Estudiando el límite con **Δx** y **Δt** tendiendo a cero de modo que **c**=**UΔt/Δx**=constante, probar que la consistencia entre (1) y (2) implica:

$$\sum_j a_j = 1 \quad \text{y} \quad \sum_j j * a_j = -c \qquad \text{y, en general,} \qquad \sum_j j^m * a_j = (-c)^m$$

para que el esquema sea de orden ***m***.

Nota: Es útil ver que de la ecuación (1) se deduce que: $\frac{\partial^m q}{\partial t^m} = (-U)^m \frac{\partial^m q}{\partial x^m}$

b) Si queremos que el esquema a construir sea de segundo orden y tomamos a_{-2} como parámetro libre, mostrar que llegamos a:

$$q_0^{n+1} = q_0^n - \frac{c}{2}(q_1^n - q_{-1}^n) + \frac{c^2}{2}(q_1^n - 2q_0^n + q_{-1}^n) - a_{-2}(q_1^n - 3q_0^n + 3q_{-1}^n - q_{-2}^n)$$

c) Para que el esquema sea “perfecto” con **c=0** y **c=1** tomamos $a_{-2} = \alpha * c * (c-1)$

- Simular una vuelta al dominio de la misma función del ejercicio 1 con este esquema, con **c=0.5** y valores de **α** entre 0 y 0.5 (fuera de ese intervalo el esquema no es estable).
- Calcular en cada caso el error medio cuadrático y comparar con los obtenidos para los esquemas con que trabajamos en el ejercicio 1.

d) Hallar el valor de **α** que minimiza el error medio cuadrático (para **c=0.5**) y el valor de **α** que convierte el esquema en un esquema de tercer orden (usar parte a). Comparar.