MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Henry Figueredo Losada

Universidad de la República-Uruguay
IIMPI-FING

henryf@fing.edu.uy

29 de septiembre de 2020

Sumario

CLASE 5. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO VIGAS.

TEMA II. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 1D-ESTÁTICOS.

1.Introducción.

2. Definición de los elementos Finitos tipo viga

3. Derivación de la Matriz de Rigidez para un Elemento Tipo Viga uso del teorema de Castigliano.

    3.1 Matriz de rigidez del elemento de viga con Rigidez a Flexión.

    3.2 Matriz de rigidez del elemento tipo viga con solamente rigidez a torsión.

4. Matriz de rigidez del elemento en los sistemas locales y globales. Matriz de transformación.

5. Matriz de Rigidez del elemento tipo viga en el espacio.

TEMA II. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 1D-ESTÁTICOS.

CLASE 5. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO VIGA.

1. Introducción.
2. Definición de los elementos Finitos tipo Barra.
3. Derivación de la Matriz de Rigidez para un Elemento Tipo Viga.
4. Transformación de la matriz de rigidez del elemento en el sistema local para el sistema global.
5. Matriz de Rigidez del elemento tipo viga en el espacio.

Clase No.5

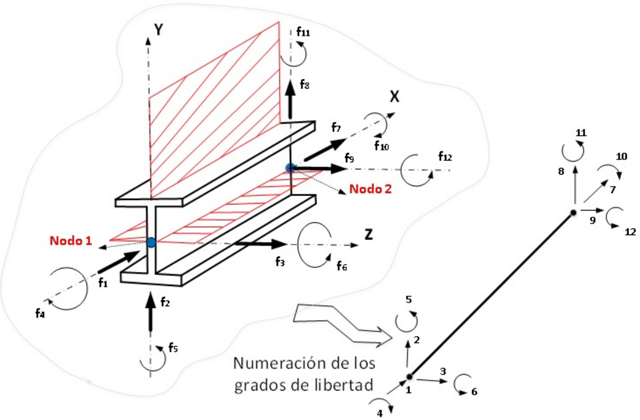
1. Introducción.

En esta aula inicia el estudio del tercer elemento finito que hará parte de la biblioteca de elementos que estamos construyendo en este curso, o sea el Elemento de Viga (BEAM) con la superposición de comportamientos independientes para flexión, cizallamiento y torción.En la mecánica estructural un elemento viga es un componente estructural caracterizado por dos propiedades:

1. La dimensión longitudinal o axial es mayor que las otras dimensiones, las cuales son conocidas como dimensiones transversales. La intercepción de un plano normal a la longitud dimensional con la barra define la sección transversal. La dimensión longitudinal define el eje longitudinal.
2. La viga resiste además de una fuerza interna axial a lo largo de su dimensión longitudinal también resisten flexiones, cizallamientos y torciones.

2. Definición de los elementos Finitos tipo viga

Un elemento viga puede trasmitir, además de Fuerzas axiales, Momentos Flectores en los planos que contienen sus dos ejes principales del plano de la sección transversal de la viga, fuerzas cortantes y Momentos Torsores.



2. Continuación

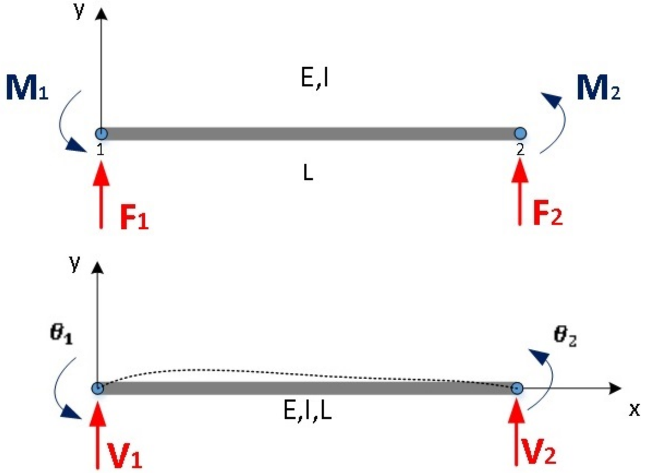
En las aula anterior fueron establecidos los fundamentos en los cuales se basa el método de rigidez directo.

Como fue visto anteriormente necesitamos transformar del sistema local para el elemento al sistema global de la estructura.

Anteriormente fue visto la transformación de un vector del sistema local de coordenadas al sistema global usando el concepto de transformación matricial para expresar la matriz de rigidez de un elemento arbitrariamente orientado en términos de sistema global de coordenadas.

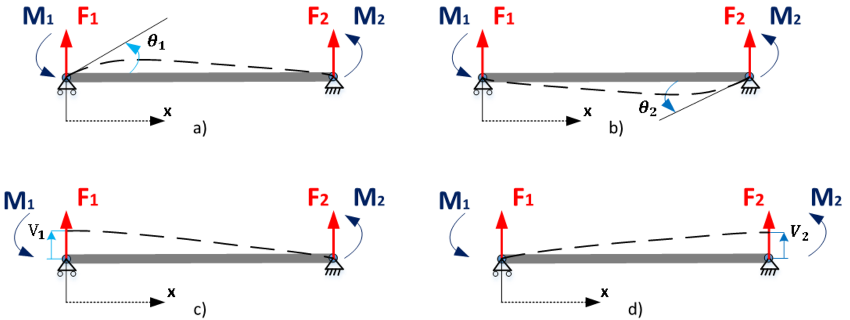
3. Derivación de la Matriz de Rigidez para un Elemento Tipo Viga uso del teorema de Castigliano.

Elemento viga en el plano 2D.

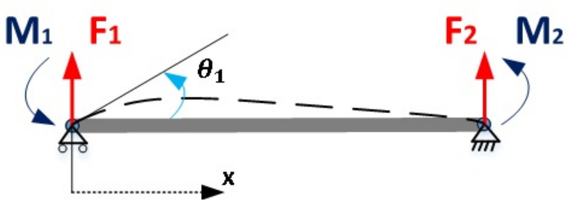


3. Continuación

Grados de Libertad nodales.



3. Continuación.



Al imponer una rotación en el nodo 1 de valor θ_1 considerando las ecuaciones de equilibrio tenemos como:

$$F_{1y} + F_{2y} = 0 \tag{1}$$

Sumatoria de momentos con respecto al nodo 1,

$$M_2 + M_1 + F_{2y} l = 0 \tag{2}$$

3. Continuación.

Momentos alrededor de z con relación a una distancia **x**

$$-M(x) + M_1 - F_{1y}x = 0 \tag{3}$$

El momento **M(x)** puedes ser escrito como:

$$M_x = M_1 - F_{1y}x \tag{4}$$

Utilizando la energía de deformación en una viga por flexión dada:

$$U = \int_0^l \frac{M(x)^2}{2EI}dx = \frac{1}{2EI}\int_0^l (M_1 - F_{1y}x)^2 dx \tag{5}$$

3. Continuación.

Usando el teorema de Castigliano y derivando la energía de deformación con respecto a F_{1y} y M_1 tenemos como:

$$\frac{\partial U}{\partial F_{1y}} = \frac{F_{1y} l^3}{3EI} - \frac{M_1 l^2}{2EI} = V_1 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_1} = -\frac{F_{1y} l^2}{2EI} + \frac{M_1 l}{EI} = \theta_1 \tag{7}$$

Resolviendo el sistema Ec (7) y Ec (8) para hallar F_{1y} ,M_1 y M_2.

$$F_{1y} = \frac{6EI}{l^2}\theta_1 \tag{8}$$

$$M_1 = \frac{4EI}{l}\theta_1 \tag{9}$$

$$M_2 = \frac{2EI}{l}\theta_1 \tag{10}$$

3. Continuación

Ecuación de equilibrio para una Viga 2D (Beam)

$$\begin{pmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

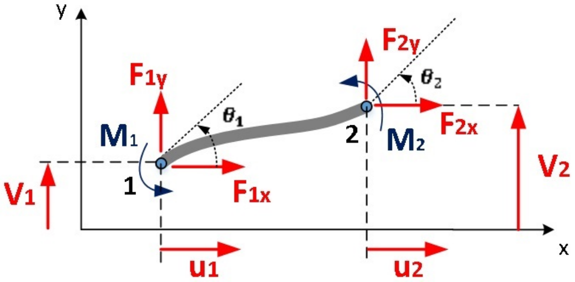
O simplemente como:

$$\{\mathbf{F_e}\} = [\mathbf{K_e}]\{\mathbf{V_e}\} \tag{12}$$

Donde
$\{\mathbf{V_e}\}$:vector de los desplazamientos nodales;
$\{\mathbf{F_e}\}$:vector de las fuerzas nodales;
$[\mathbf{K_e}]$: matriz de rigidez de la viga en **SL**

3.1 Matriz de rigidez del elemento de viga con Rigidez a Flexión

Manteniendo las consideraciones de las hipótesis de pequeñas deflexiones, o comportamiento axial de la viga es independiente del comportamiento a flexión.

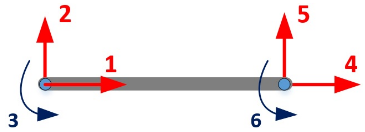


Clase No.5

3.1 Continuación

Llamamos $a = \frac{EA}{l}$ y $b = \frac{EI}{l^3}$

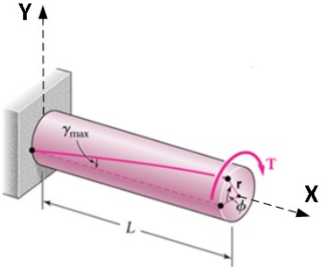
$$[\mathbf{k_e}] = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ **** & **** & **** & **** & **** & **** \end{array} & \\ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 12b & 6bl & 0 & -12b & 6bl \\ 0 & 6bl & 4bl^2 & 0 & 6bl & 2bl^2 \\ -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & -12b & -6bl & 0 & 12b & -6bl \\ 0 & 6bl & 2bl^2 & 0 & -6bl & 4bl^2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} *1 \\ *2 \\ *3 \\ *4 \\ *5 \\ *6 \end{array} \end{array}$$

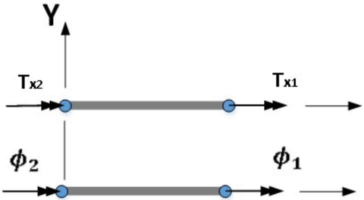


Clase No.5

3.2 Matriz de rigidez del elemento tipo viga con solamente rigidez a torsión.

Asumiendo dentro de las mismas limitaciones anteriores definidas para la superposición de la matriz de rigidez con el comportamiento independiente a la flexión y carga axial de la viga. De forma semejante será tratada la contribución de la rigidez torsional de la viga.





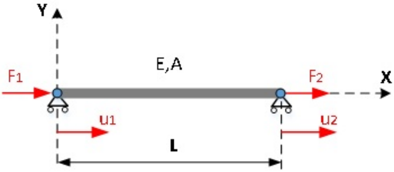
Clase No.5

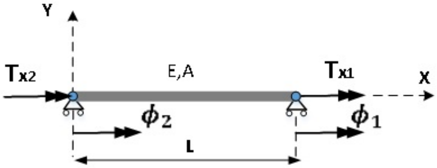
3.2 Continuación.

La relación entre el ángulo de giro Φ y el par de torsión **T**, la torsión de Saint-Venant es gobernada por la siguiente ecuación.

$$\Phi = \frac{TL}{JG} \quad \therefore \quad T = \frac{JG}{L}\Phi \tag{13}$$

La expresión de la matriz de rigidez de una barra sujeta apenas a torsión será dada de forma semejante a Matriz de rigidez de una barra articulada.Por tanto, todo el desenvolvimiento analítico efectuado para la barra articulada, podría ser íntegramente utilizado a partir del conocimiento de la relación Ec (15).





3.2 Continuación.

Recordando el desarrollo para barra articulada la ecuación en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \therefore \begin{Bmatrix} T_{x1} \\ T_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{l} & -\frac{GJ}{l} \\ -\frac{GJ}{l} & \frac{GJ}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{Bmatrix}$$

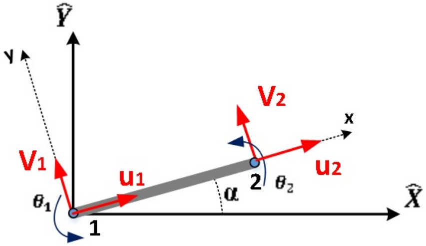
Destacando la matriz de rigidez a torsión tiene dimensiones 2x2 y los coeficientes estarán dados por $\frac{GJ}{L}$

$$[\mathbf{k_e}] = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{l} & -\frac{GJ}{l} \\ -\frac{GJ}{l} & \frac{GJ}{l} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Clase No.5

4. Matriz de rigidez del elemento en los sistemas locales y globales. Matriz de transformación.

Para representar los posibles grados de libertad del elemento viga en un espacio bidimensional. La relación entre las coordenadas locales (x,y) y el sistema global de coordenadas $(\hat{X}, \hat{Y})$ es mostrada:



$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\,\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & sen\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{v}_i \\ \hat{\theta}_i \\ \hat{u}_j \\ \hat{v}_j \\ \hat{\theta}_j \end{pmatrix}$$

4. Continuación

Retomando el procedimiento visto anteriormente Clase No.4 para transformar a Matriz de Rigidez de un elemento del sistema local al sistema global, representando la Ec. (17):

$$[\hat{\mathbf{K}}^{\mathbf{e}}] = [\mathbf{C}]^{\mathbf{T}}[\mathbf{k}]^{\mathbf{e}}[\mathbf{C}] \tag{15}$$

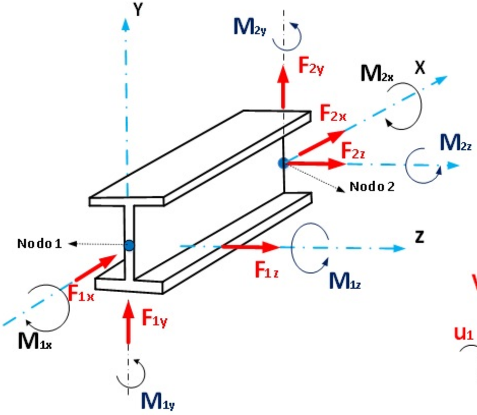
Aplicando la Ec. (17) obtenemos la Matriz de Rigidez del Elemento en el **SG** como:

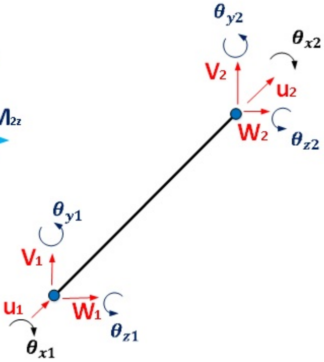
$$[K^e]=\begin{bmatrix} ac^2+12bs^2 & & & & \textit{Simétrica} & \\ (a-12b)\,cs & as^2+12bc^2 & & & & \\ -6bLs & 6bL & 4bL^2 & & & \\ -ac^2-12bs^2 & -(a-12b)\,cs & 6bLs & ac^2+12bs^2 & & \\ -(a-12b)\,cs & -as^2-12bc^2 & -6bLc & (a-12b)\,cs & as^2+12bc^2 & \\ -6bLs & 6bLc & 2bL^2 & 6bLs & -6bLc & 4bL^2 \end{bmatrix}$$

Siendo $a = \frac{EA}{l}, b = \frac{EI}{l^3}, c = cos(\alpha), s = sen(\alpha)$

5. Matriz de Rigidez del elemento tipo viga en el espacio.

El procedimiento empleado anteriormente para formular la Matriz de Rigidez (viga) considerando independientemente la contribución de su **R**igidez Axial, **R**-Flexión y **R**-Torsión, también puede ser usado para formular la matriz de Rigidez en un espacio 3D





Clase No.5

5. Continuación.

La matriz de Rigidez en elemento de tipo viga, en el caso más general con 12 grados de libertad

$$[k]^e = \begin{bmatrix}
a & & & & & & & & & & & \\
0 & 12b_z & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 12b_y & & & & & & Simétrica & & & \\
0 & 0 & 0 & t & & & & & & & & \\
0 & 0 & -6b_yL & 0 & 4b_yL^2 & & & & & & & \\
0 & 6b_zL & 0 & 0 & 0 & 0 & a & & & & & \\
0 & -12b_z & 0 & 0 & 0 & -6b_zL & 0 & 12b_z & & & & \\
0 & 0 & -12b_y & 0 & -6b_yL & 0 & 0 & 0 & 12b_y & & & \\
0 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & & \\
0 & 0 & -6b_yL & 0 & 2b_yL^2 & 0 & 0 & 0 & 6b_yL & 0 & 4b_yL^2 & \\
0 & 6b_zL & 0 & 0 & 0 & 2b_zL^2 & 0 & -6b_zL & 0 & 0 & 0 & 4b_zL^2
\end{bmatrix}$$

Siendo $a = \frac{EA}{l}$, $b_z = \frac{EI_z}{l^3}$, $b_y = \frac{EI_y}{l^3}$, $t = \frac{GJ}{l}$