Clase 14 – Límite y continuidad (Parte 3)

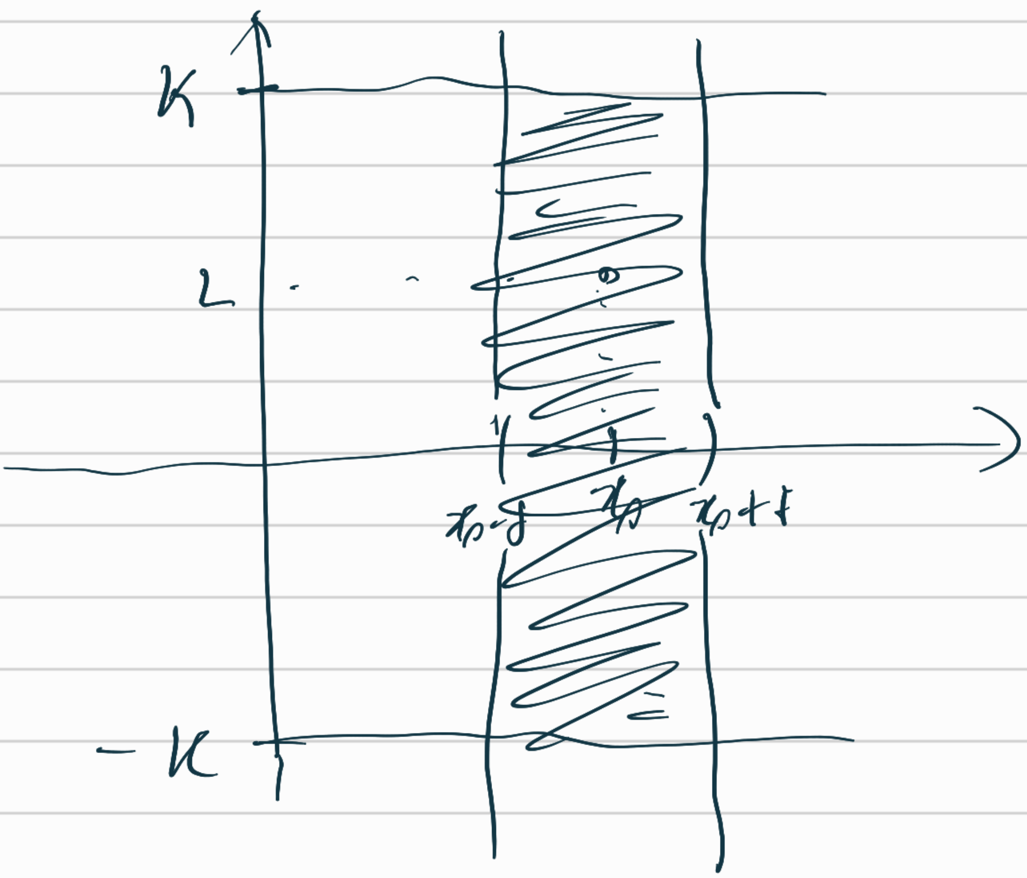
- límite de la suma es la suma de los límites
- Desigualdad triangular: $|x+y| \leq |x|+|y|$
  $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$

Ejercicio: 1) La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x)=|x|$ es continua.
2) Las funciones constantes son continuas

Obs. Si existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Rightarrow f$ es acotada en un entorno de x_0.

Dem. Tomamos $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0 \,/$ si $|x-x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ entonces $|f(x)-L| < \varepsilon = 1 \Rightarrow f(x) \in [L-1, L+1]$

f es acotada en $E^*(x_0, \delta)$
$\Rightarrow f$ es acotada en $E(x_0, \delta)$.



Prop. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L' \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = LL'$

Dem. Fijamos $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar $\delta > 0$ t.q.

$$\text{si } \left.\begin{array}{l} |x - x_0| < \delta \\ x \neq x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)g(x) - LL'| < \varepsilon$$

Observamos $|f(x)g(x) - LL'| = |(f(x) - L)g(x) + Lg(x) - LL'|$

$= |(f(x) - L)g(x) + L(g(x) - L')| \underset{\text{des. }\Delta}{\leq} |(f(x) - L)g(x)| + |L(g(x) - L')|$

$$\leq \underbrace{|f(x) - L|}_{< \frac{\varepsilon}{2K}} \underbrace{|g(x)|}_{\leq K} + |L| \cdot \underbrace{|g(x) - L'|}_{< \frac{\varepsilon}{2(|L|+1)}} \leq \varepsilon$$

Como $f(x) \to L$ y $g(x) \to L'$ cuando $x \to x_0$:

$\exists\, \delta' > 0$ t.q. $|x - x_0| < \delta'$, $x \neq x_0 \Rightarrow |g(x)| \leq K$ para cierto $K > 0$

$\exists\, \delta'' > 0$ t.q. $|x - x_0| < \delta''$, $x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2K$

$\exists\, \delta''' > 0$ t.q. $|x - x_0| < \delta'''$, $x \neq x_0 \Rightarrow |g(x) - L'| < \dfrac{\varepsilon}{2(|L|+1)}$

Tomando $\delta = \min\{\delta', \delta'', \delta'''\}$, si $|x - x_0| < \delta$ y $x \neq 0$ entonces

$$|f(x)g(x) - LL'| < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K + \frac{|L| \cdot \varepsilon}{2(|L|+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad ✓ \quad \square$$

Corolario 1: Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha L$.

(Considerar $g(x) = \alpha$ una función constante)

Corolario 2 : $\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$

si ambos límites de la derecha existen.

Dem. $\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0}(f(x)+(-1)g(x))$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0}(-1)g(x)$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x) + (-1)\lim_{x\to x_0} g(x).$$

Corolario 3: Suma y producto de funciones continuas es continua.

Dem. (Caso suma) Sean $f: I \to \mathbb{R}$, $g: I \to \mathbb{R}$

Si $x_0 \in I$, como f es continua en x_0 $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

como g es continua en $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0)$

$\Rightarrow f(x)+g(x)$ es continua en x_0.

Ejercicio: Hacer el caso del producto.

Corolario 4: Los monomios $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $f(x) = ax^n$ son funciones continuas.

Dem. Consideramos $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, h(x) = a$
y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = x$

observamos que $f(x) = h(x) \cdot \underbrace{g(x) \cdot g(x) \cdots g(x)}_{n \text{ veces}}$

$\Rightarrow f(x)$ es continua pues es producto de continuas.

Corolario 5: Los polinomios son funciones continuas

(Pues es suma de monomios y los monomios son funciones continuas).

Prop. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $L \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$

Dem. Fijamos $\varepsilon > 0$. Debemos encontrar $\delta > 0$ t.q.
$$\left.\begin{array}{l} \text{si } |x - x_0| < \delta \\ x \neq x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L} \right| = \left| \frac{L - f(x)}{f(x) L} \right| = \frac{|f(x) - L|}{\underbrace{|f(x)|}_{\geq \frac{|L|}{2}} \cdot |L|}$$

si $f(x) \neq 0$

usamos $L \neq 0$

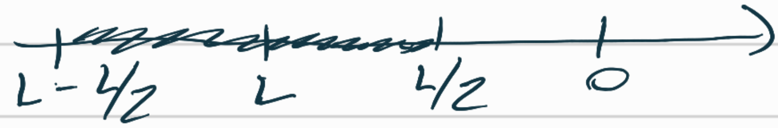
Como $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0$ entonces:
$\exists \delta' > 0$ t.q. si $\left.\begin{array}{l} |x - x_0| < \delta' \\ x \neq x_0 \end{array}\right| \Rightarrow |f(x) - L| < |L|/2$

centro radio

en particular $|f(x)| > |L|/2$

si $L>0$

si $L<0$



$\exists\ \delta''>0$ t.q. si $\left.\begin{array}{l}|x-x_0|<\delta'' \\ x\neq x_0\end{array}\right| \Rightarrow |f(x)-L|<\left(\frac{L^2}{2}\right).\varepsilon$

Tomando $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$: si $|x-x_0|<\delta$ y $x\neq x_0$ entonces

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right| = \frac{|f(x)-L|}{|f(x)|.|L|} \leq \frac{\left(\frac{L^2}{2}\right).\varepsilon}{(|L|/2).|L|} = \frac{\left(\frac{L^2}{2}\right).\varepsilon}{(L^2/2)} = \varepsilon \quad \checkmark$$

<u>Corolario 1</u>: Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=L'\neq 0$

entonces $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = L/L'$.

<u>Dem.</u> $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x\to x_0}\left(f(x).\frac{1}{g(x)}\right)$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x) . \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = L.\frac{1}{L'} = \frac{L}{L'}.$$

(En otras palabras: límite del cociente = cociente de los lím. si los límites existen y el denominador $\neq 0$)

Corolario 2: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en x_0 y $g(x_0) \neq 0$
entonces $\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en x_0.

Dem. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ si $x \to x_0$.

Corolario 3: Las funciones racionales son continuas en los ptos donde el denominador no se anula.

Dem: Son cocientes de polinomios y los polinomios son continuos.

Criterio del sandwich

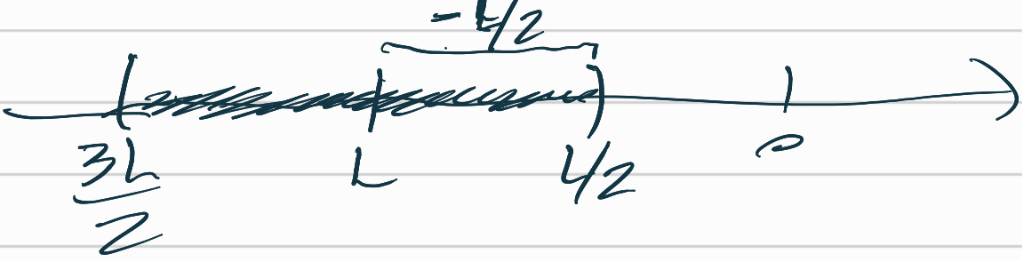
Recordar: $f \geq g$ en I significa $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in I$.

Prop. Sea $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{I}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Si $f \geq 0$ en I entonces $L \geq 0$

Dem. Por absurdo, si $L < 0$ como $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

tomando $\varepsilon = -L/2 > 0$, $\exists \delta > 0$ T.q si
$|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < -L/2$



$\forall\, x \in E^*(x_0, \delta) \cap I$ tenemos $\begin{cases} f(x) \geq 0 & \text{para } x \in I \\ f(x) \leq L/2 < 0 & \text{para } x \in E^*(x_0,\delta) \end{cases}$

$\Rightarrow 0 \leq f(x) < 0$ lo cual es absurdo.

$\therefore\ L \geq 0$ $\square$

<u>Corolario</u>: Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$ y existen los límites de f y g cuando $x \to x_0$. Si $f \geq g$ en $I \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \geq \lim_{x \to x_0} g(x)$

<u>Dem.</u> Considerar $h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow h \geq 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) \geq 0$ $\square$.

<u>Criterio del sandwich</u>: $g_1 \leq f \leq g_2$ y $\lim_{x \to x_0} g_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_2(x) = L$

entonces $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe y vale L.