Clase 13 - Límite y continuidad (Parte 2)

Informalmente: $\mathring{I} = I$ sacándole los extremos
$\overline{I} = I$ agregándole los extremos

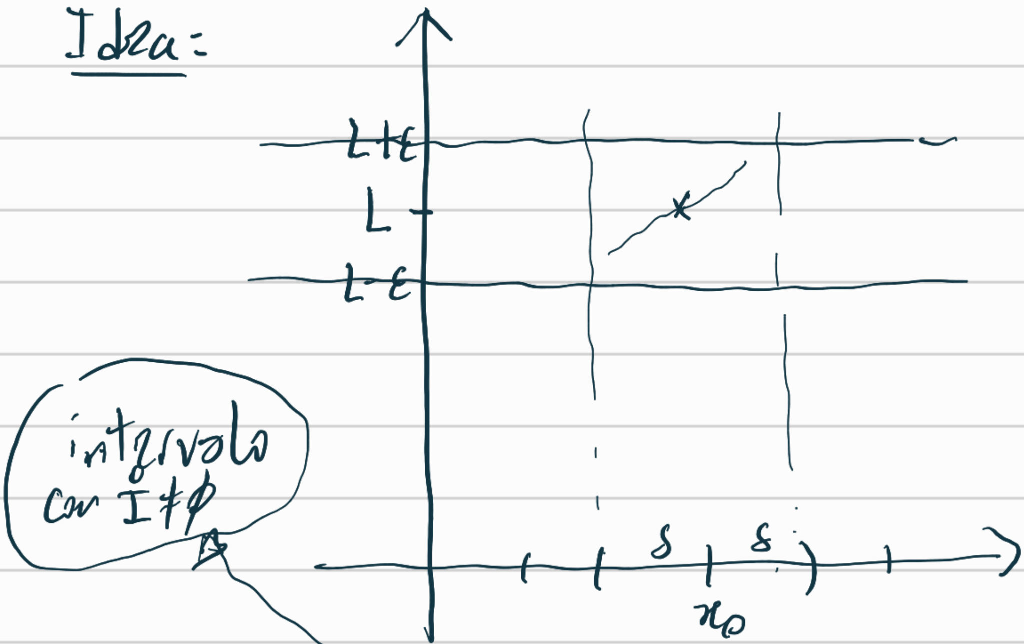
Obs: $\mathring{I} \subseteq I \subseteq \overline{I}$

Def: Si $x_0 \in \mathring{I} \Rightarrow x_0$ es un pto. interior de I
Si $x_0 \in \overline{I} \Rightarrow x_0$ " " " adherente a I

Obs: Si $x_0 \in \mathring{I} \Rightarrow x_0 \in I$
Si $x_0 \in \overline{I} \Rightarrow x_0 \in I$ o $x_0 \in I^c$

Noción de límite y continuidad

Idea:



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$
$$\Updownarrow$$
Dado $\varepsilon > 0$,
$\exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0$
tq $|x - x_0| < \delta$
$x \neq x_0$
se tiene
$|f(x) - L| < \varepsilon$

Def: Sea $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$, $L \in \mathbb{R}$.
Decimos que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a x_0
(se denota: $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0$
o $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$)

si se cumple la siguiente condición:

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0 \,/\, |x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$(\forall \varepsilon > 0)$

esto nos dice que no nos importa cuánto vale $f(x_0)$

<u>Def</u>: Si existe el límite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y coincide con $f(x_0)$ $\left(\text{o sea } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \right)$ entonces decimos que f es continua en x_0.

<u>Def</u>. Decimos que f es continua si es continua en todos los puntos de su dominio.

Teorema (unicidad del límite): Si L y L' satisfacen:

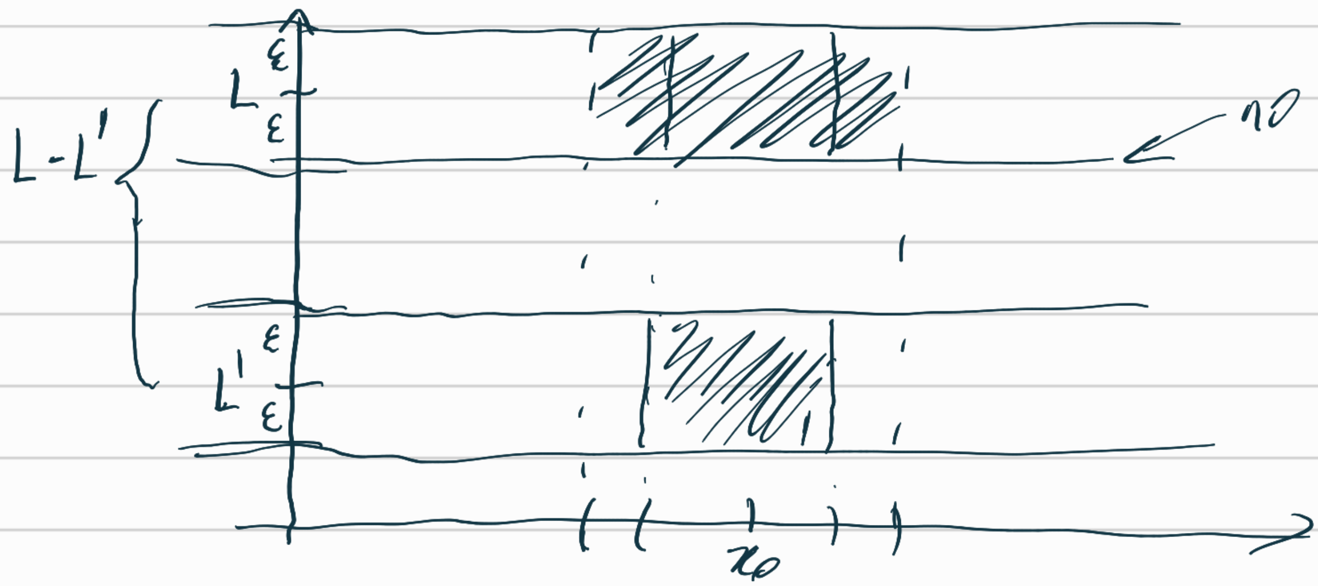
Tal que

i) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. si $|x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta' > 0$ t.q. si $|x - x_0| < \delta',\ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L'| < \varepsilon$

entonces $L = L'$.

<u>Dem</u>. Por absurdo, supongamos que $L \neq L'$. Sin pérdida de generalidad, suponemos $L > L'$



Podamos tomar $\varepsilon = \frac{L-L'}{2} > 0 \Rightarrow E(L,\varepsilon) \cap E(L',\varepsilon) = \emptyset$

Por i) y ii) existen $\delta, \delta' > 0$ tales que

Si $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in E(L,\varepsilon)$

Si $|x - x_0| < \delta'$, $x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L'| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \in E(L',\varepsilon)$

$$\Rightarrow f(x) \in E(L,\varepsilon) \cap E(L',\varepsilon) = \emptyset \quad \lightning$$

Luego $L = L'$. $\square$

<u>Ejemplo</u>: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = 2x + 1$.
Probar que f es continua en 0.

<u>Solución</u>: tenemos que probar $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

o sea, que $\lim_{x \to 0} (2x+1) = 1$.

Fijamos $\varepsilon > 0$, debemos hallar $\delta > 0$ t.q.

si $|x - 0| < \delta$, $x \neq 0 \Rightarrow \underline{|f(x) - 1| < \varepsilon}$

si $|x| < \delta$, $x \neq 0 \Rightarrow \underbrace{|2x+1-1|}_{|2x| = 2|x|} < \varepsilon$

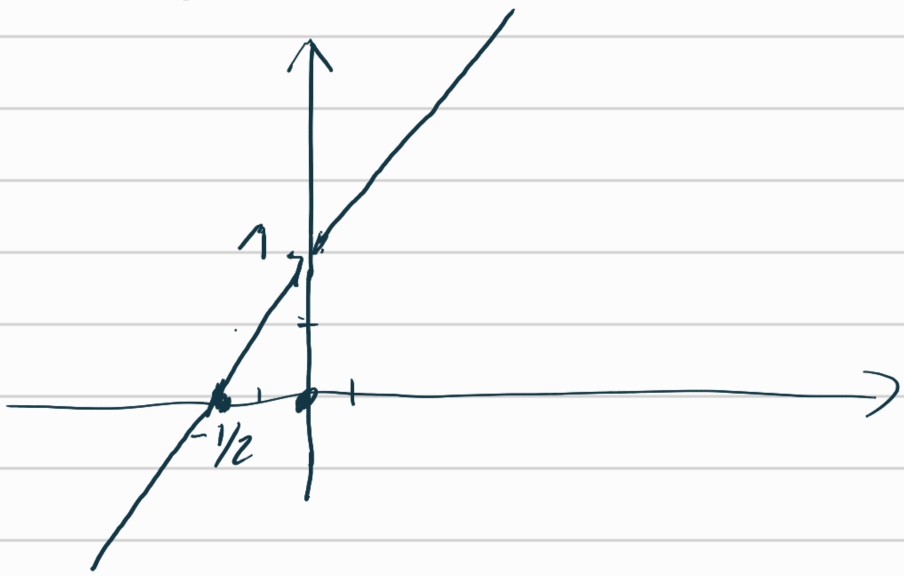
tenemos $|f(x)-1| = 2|x| < 2\delta \leq \varepsilon$

basta tomar $\delta = \varepsilon/2$

Ejemplo: Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Elegir la opción correcta:

A) El límite de $g(x)$ cuando $x \to 0$ no existe
B) El límite existe y vale 0
C) El límite existe y vale 1
D) Ninguna de las anteriores



En el ejemplo anterior probamos que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \quad \text{donde } f(x) = 2x+1$$

La función $g(x)$ coincide con $f(x)$ en $E^*(0,1)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = 1$. (pues no importa el valor de la función en $x=0$)

La correcta es la c).

Ejemplo: Probar que $f(x)=x$ es continua en $\mathbb{R}$.

Solución: Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, tenemos que probar que $\lim_{x\to x_0} x = x_0$

Dado $\varepsilon>0$, queremos encontrar $\delta>0$ /

si $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0 \Rightarrow \underbrace{|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon}$.

$$|f(x)-f(x_0)| = |x-x_0| < \delta \underset{\uparrow}{=} \varepsilon$$
tomando $\delta=\varepsilon$

Ejemplo: Consideramos la función de Dirichlet

$$D:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ / \ D(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

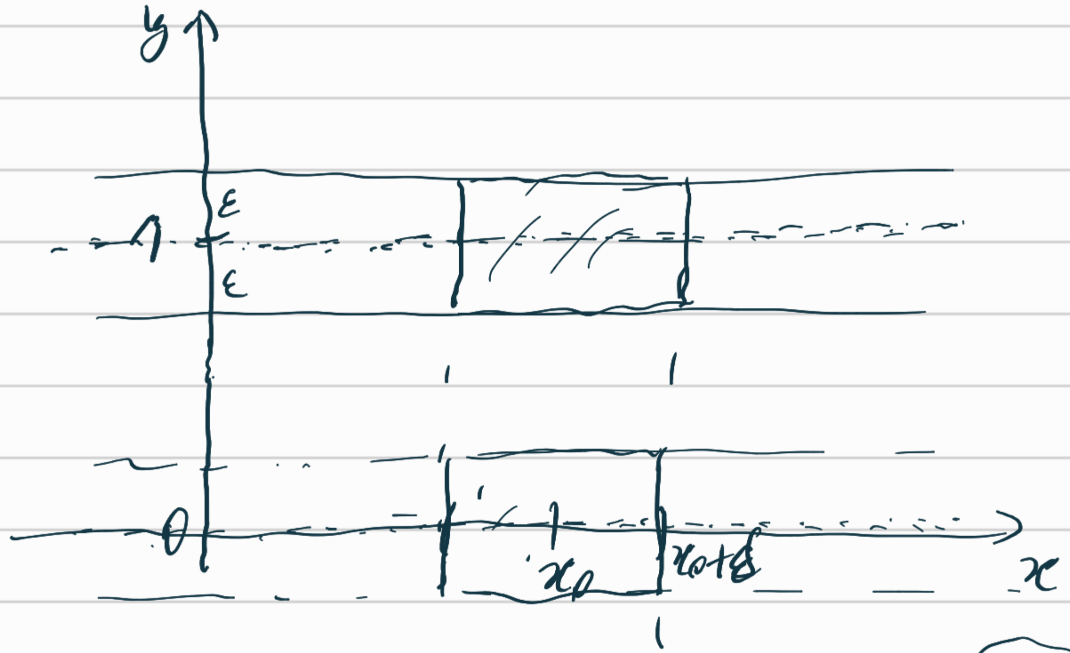
Probar que $D(x)$ no es continua en ningún punto.

Solución: Sea $x_0\in\mathbb{R}$, queremos probar que $D(x)$ no es continua en x_0.

Por absurdo, si D fuese continua en x_0 entonces

dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ t.q. si $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$
se cumple $|D(x) - D(x_0)| < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{4}$



Dado $\varepsilon = 1/4$ y $\delta > 0$ / si $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$
entonces $|D(x) - D(x_0)| < 1/4$

Caso $x_0 \in \mathbb{Q}$: $|D(x) - 1| < 1/4$, $\forall x \in E^*(x_0, \delta)$
como $D(x) = 0$ o 1 $\Rightarrow$ $D(x) = 1$, $\forall x \in E^*(x_0, \delta)$
$\Rightarrow E^*(x_0, \delta) \cap \mathbb{Q}^c = \phi$ ABSURDO
por que los irracionales son densos

Caso $x_0 \in \mathbb{Q}^c$: llegamos a un absurdo usando
que los racionales son densos
(completar detalles) $\square$

V-F: A) D no es continua en x_0

B) $\lim_{x \to x_0} D(x) \neq D(x_0)$

¿Son equivalentes?

Obs: En la afirmación B ya afirma que el límite existe entonces no son equivalentes

Límite de la suma y producto

Recordar las siguientes propiedades del valor absoluto:

1) (Desigualdad Triangular) $|x+y| \leq |x|+|y|$

2) $|x-y| \geq ||x|-|y||$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Ejercicio: Probar esas desigualdades

Prop. Sean $f, g: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = L'$ $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x)+g(x)) = L+L'$

(el límite de la suma es la suma de los límites)

Dem: $\underbrace{\text{Dado } \varepsilon > 0}_{\text{fijamos}}$, queremos hallar $\delta > 0$ /

si $|x-x_0|<\delta$, $x\neq x_0 \Rightarrow \underline{|f(x)+g(x)-(L+L')|<\varepsilon}$

Como $f(x)\to L$ cuando $x\to x_0$, $\exists\, \delta'>0$ /
si $|x-x_0|<\delta'$, $x\neq x_0 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon/2$

Como $g(x)\to L'$ cuando $x\to x_0$, $\exists\, \delta''>0$ /
si $|x-x_0|<\delta''$, $x\neq x_0 \Rightarrow |g(x)-L'|<\varepsilon/2$

$$|f(x)+g(x)-(L+L')| = |(f(x)-L)+(g(x)-L')|$$
$$\leq |f(x)-L| + |g(x)-L'|$$

si $|x-x_0|<\min\{\delta',\delta''\}=:\delta$, $x\neq x_0$
se cumple $|f(x)-L|<\varepsilon/2$
$|g(x)-L'|<\varepsilon/2$

$$\Rightarrow |f(x)+g(x)-(L+L')| \leq |f(x)-L|+|g(x)-L'|<\varepsilon$$

$\square$