Simulación a Eventos Discretos

Tema 5: Análisis de resultados (modelo único, comparación de configuraciones)

Análisis de resultados

Componente del estudio tan importante como la construcción del modelo.

Cuando las entradas del modelo son estocásticas, se debe realizar un análisis adecuado. Muchas veces no basta con una sola ejecución.

Desde el punto de vista estadístico, una simulación puede ser vista como un experimento de muestreo basado en computadora.

En simulaciones no estacionarias y autocorrelacionadas, la hipótesis de variables aleatorias i.i.d. no es válida.

En general, una única ejecución de la simulación no es suficiente porque: (i) la estimación de la media puede estar alejada del valor real, (ii) las muestras están correlacionadas, por lo que las hipótesis para la construcción del intervalo de confianza no son válidas.

Insumos para el análisis

Matriz $Y = \{y_{ji}\}, j \in [1..n], i \in [1..m]$,

Son m muestras en cada una de las n replicaciones independientes (ejecuciones de la simulación con diferentes semillas del generador de números seudoaleatorios y ejecutadas con las mismas condiciones iniciales).

Para una fila j cualquiera (ejecución), las m muestras $y_{j1} \ldots y_{jm}$ no son i.i.d. (ver clase pasada).

Pero para una columna i cualquiera, las n muestras $y_{1i} \ldots y_{ni}$ sí lo son.

En general, los métodos se basan en definir la v.a. $\bar{y}_i = \sum_{j=1}^{m} y_{ji}/m$ (promedio en la ejecución i) y luego estimar la medida de interés en base a $\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i/n$ (calculado en base a las n replicaciones).

Estado estacionario

Para el proceso estocástico $Y_1, Y_2, \ldots$ se define $F_i(y|I) = P(Y_i \leq y|I)$ como la distribución transitoria del proceso en el instante de tiempo i dadas las condiciones iniciales I.

Si $F_i(y|I)$ tiende a $F(y)$ cuando i tiende a infinito para cualquier condición inicial I, entonces $F(y)$ es la distribución en estado estacionario del proceso $Y_1, Y_2, \ldots$.

Notar que no es una tendencia de los valores puntuales en una única replicación (una fila de la matriz Y de la diapositiva anterior), sino que es la distribución de todos los valores en un instante i (columna i), según el avance del tiempo (índice i).

La mayoría de los sistemas reales no tienen distribuciones estacionarias.

Tipos de simulación

Terminal: Evento especial que determina el final de una replicación. Es importante que las condiciones iniciales representen el caso real. Ejemplo: taller de reparaciones.

No terminal: No existe un evento especial como en la terminal. En general interesa calcular medidas en estado estacionario. Ejemplo: hospital simple.

Una simulación de un sistema dado puede ser terminal o no terminal, dependiendo de los objetivos del estudio. Por ejemplo, interesa estudiar el comportamiento del hospital complejo, hasta el momento en que cierra la sala de operaciones.

Análisis de simulaciones terminales

Procedimiento con muestra de tamaño fijo. Se estiman la media y el intervalo de confianza de la medida de interés (por ejemplo, tiempo medio de espera) usando los procedimientos vistos en la clase anterior.

En este caso las n muestras surgen de n replicaciones independientes y cada una de las muestras es la media calculada en base a la replicación (por ejemplo, utilizando los histogramas vistos en una clase anterior).

Notar que en este caso, la cantidad de replicaciones n se fija de manera arbitraria, o por ejemplo, en base al presupuesto de tiempo de ejecución.

Dado que el intervalo de confianza está sujeto a error (ver clase anterior), un enfoque alternativo consiste en determinar el valor de n para no incurrir en un error mayor que un valor prefijado.

Análisis de simulaciones no terminales

Es relevante la detección del comienzo del estado estacionario; las medidas deben tomarse a partir de ese instante.

Existen varios enfoques para realizar esta detección, muchos se basan en una única replicación (batch means, método regenerativo).

Un método de amplio uso es el basado en replicaciones/eliminaciones, que requiere n replicaciones independientes.

En cualquier caso, para estimar la media en una replicación cualquiera en base a observaciones $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ se utiliza

$$\bar{Y}(m,l) = \frac{\sum_{j=l+1}^{m} Y_i}{m-l}$$

donde l marca el comienzo del estado estacionario.

Método de replicaciones/eliminaciones de Welch

1. Ejecutar n replicaciones de la simulación, cada una de largo m, para obtener $Y = \{y_{ji}\}, j \in [1..n], i \in [1..m]$.

2. Calcular $\bar{Y}_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_{ji}/n$ para toda columna $i \in [1..m]$.

3. Calcular los *promedios móviles* $\bar{Y}_i(w)$ donde $w \leq \lfloor m/4 \rfloor$ es la *ventana* del promedio:

$$\bar{Y}_i(w) = \begin{cases} \sum_{s=-w}^{w} \bar{y}_{i+s}/(2w+1), \text{ si } i = w+1, \ldots, m-w \\ \\ \sum_{s=-(i-1)}^{i-1} \bar{y}_{i+s}/(2i+1), \text{ si } i = 1, \ldots, w \end{cases}$$

El estado estacionario comienza cuando los $\bar{Y}_i(w)$ se estabilizan.

Comparación de configuraciones

Relevante para simulaciones comparativas.

Objetivo inicial: construir un intervalo de confianza para la diferencia de la medida de interés entre dos configuraciones alternativas del sistema.

Mismas herramientas que las vistas hasta ahora.

Para $n \in \{1, 2\}$ sea $X_{i1}, X_{i2} \ldots X_{in_i}$ una muestra de n_i observaciones i.i.d. del sistema (o configuración) i, donde $\mu_i = E(X_{ij})$ es la respuesta de interés; buscamos construir un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$.

La independencia (o no) entre X_{1j} y X_{2j} depende de cómo se ejecuten las simulaciones y determinan el método a utilizar.

Intervalo de confianza de muestras emparejadas

Si $n_1 = n_2 = n$, definimos $Z_j = X_{1j} - X_{2j}$ y calculamos la media y el intervalo de confianza utilizando el procedimiento visto en la clase anterior (con la distribución t-student).

No es necesario asumir que X_{1j} y X_{2j} son independientes, ni que tienen la misma varianza.

Incluso, si están positivamente correlacionadas van a contribuir a reducir la varianza de Z_j (continuaremos con esto en el tema Reducccción de varianza).

Es importante notar que para la comparación: (i) hemos reducido los dos sistemas alternativos a uno, (ii) Z_j es la diferencia de dos medidas, cada una calculada en base a una replicación completa (por ejemplo, el promedio de esperas de todos los pacientes del hospital en la replicación).

Intervalo alternativo para dos muestras

Las observaciones de las configuraciones alternativas no se asumen emparejadas, en particular $n_1 \neq n_2$.

Las muestras X_{1j} y X_{2j} son independientes.

Se calculan $\bar{X}_1(n_1)$, $\bar{X}_2(n_2)$, $S_1^2(n_1)$ y $S_2^2(n_2)$ de la forma habitual.

El intervalo tiene la forma

$$\bar{X}_1(n_1) - \bar{X}_1(n_2) \pm t_{\hat{f},1-\alpha/2}\sqrt{S_1^2(n_1)/n_1 + S_2^2(n_2)/n_2}$$

donde $\hat{f} = \frac{[S_1^2(n_1)/n_1 + S_2^2(n_2)/n_2]^2}{[S_1^2(n_1)/n_1]^2/(n_1-1) + [S_2^2(n_2)/n_2]^2/(n_2-1)}$ (valor redondeado)

Otros aspectos

- Comparación de sistemas en estado estacionario.
- Comparación de más de dos configuraciones.
- Ordenamiento de varias alternativas; selección de una (o más) de ellas.