Capítulo 4

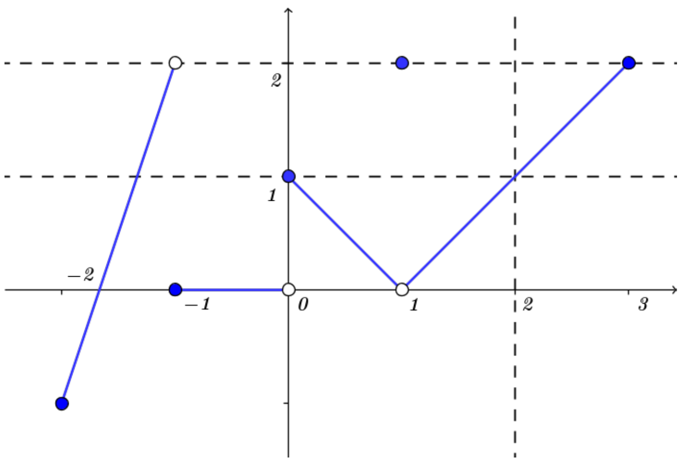
Límites

4.1. Interpretación geométrica de límites

En esta sección no se piden pruebas formales.

1. Determine los límites que se piden para la función $g(x)$ cuya gráfica se muestra a continuación o explique por qué no existen

   a) $\lim_{x \to -1} g(x)$ *b*) $\lim_{x \to 0} g(x)$ *c*) $\lim_{x \to 1} g(x)$ *d*) $\lim_{x \to 2} g(x)$

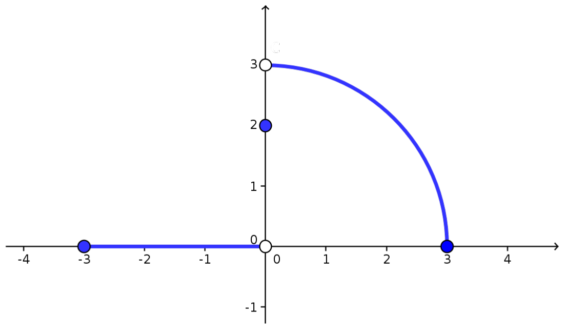


   Calcular

   e) $g(-1)$ *f*) $g(0)$ *g*) $g(1)$ *h*) $g(2)$

2. A partir de la función cuya gráfica se muestra aquí explique por qué

a) $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ b) $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 2$ c) $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 3$



3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

   Bosquejar la función f y determinar en qué puntos existe el $\lim_{x\to a} f(x)$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x - \cos(x)$.

   Encontrar $L \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x que cumple $0 < |x| < \delta$, para los valores $\epsilon = 10^c$ (con $c \in \{0, -1, \ldots, -6\}$).

   Para esto ir a la página de EVA Capítulo 4: Visualización de la definición de límite y utilizar la visualización del gráfico.

4.2. Definición y propiedades básicas de límites

1. Encontrar $L \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x en el dominio de f que verifique las desigualdades $0 < |x - a| < \delta$, para los valores $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-10}$.

   a) $f(x) = x^2$, $a = 0$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$ c) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $a = 0$

   d) $f(x) = x^2$, $a \in \mathbb{R}$ e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $a \in \mathbb{R}^+$ f) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $a \in \mathbb{R}$

2. Encontrar $L \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < 10^{-5}$ para todo x en el dominio de f que verifica las desigualdades $0 < |x - a| < \delta$.

   a) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $a = 0$ b) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$, $a = 1$ c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, $a = 1$

   d) $f(x) = x\cos\left(x^2\right)$, $a = 0$ e) $f(x) = \frac{x}{2 - \sin^2(x)}$, $a = 0$

   f) $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $a = 0$ g) $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $a = 0$

3. Se estudian las siguientes variaciones de la definición de límite.

   Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{R}$, el límite de f cuando x tiende a p es L si:

   a) (Definición de límite)
   $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$: tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$.

   b) $\exists \epsilon > 0$ y $\exists \delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$.

   c) $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$.

   d) $\forall \epsilon > 0$, $\forall \delta > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x - p| \leq \delta$ se tiene que $|f(x) - L| \leq \epsilon$.

4. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones donde I es un intervalo abierto y $p \in I$ tal que $\lim_{x \to p} f(x) = a$ y $\lim_{x \to p} g(x) = b$.

   a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la función $h(x) = f(x) + \lambda$ verifica que $\lim_{x \to p} h(x) = \lambda + a$.

   b) Probar que la función $h(x) = f(x) + g(x)$ tiene límite en p y $\lim_{x \to p} h(x) = a + b$.

   c) Dada una función h, probar que el límite $\lim_{x \to p} f(x) + h(x)$ existe si solo si el límite $\lim_{x \to p} h(x)$ existe. *Sugerencia: recordar que existe* $\lim_{x \to p} f(x)$ *por hipotesis del ejercicio.*

   d) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la función $\tilde{f}(x) = \lambda f(x)$ verifica que $\lim_{x \to p} \tilde{f}(x) = \lambda a$.

   e) Probar que la función $h(x) = f(x)g(x)$ verifica que $\lim_{x \to p} h(x) = ab$.

   f) Probar que si $b \neq 0$ entonces la función $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ cumple que $\lim_{x \to p} h(x) = \dfrac{a}{b}$.

   g) Supongamos que $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Sea $h(x)$ una función real, probar que existe el $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{h(x)}{g(x)}$ si solo si existe el límite $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{h(x)}{f(x)}$, más aun $\displaystyle\lim_{x \to p} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{h(x)}{f(x)}$.

   h) Sea $h(x)$ una función acotada y suponga que $a = 0$, probar que la función $r(x) = f(x)h(x)$ cumple que $\lim_{x \to p} r(x) = 0$.

   i) Suponga que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$. Probar que $a \leq b$. Dar un ejemplo de funciones $f(x) < g(x)$ $\forall x \neq p$ y con $a = b$.

   j) Suponga que $a = b$ y que $\forall x \in I$ $f(x) \leq g(x)$. Probar que si $h(x)$ verifica $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ entonces $\lim_{x \to p} h(x) = a$.

   k) Suponga que $a = p$ y sea $h(x) = g(f(x))$ probar o dar un contraejemplo de la afirmación: Existe el límite de h en p y $\lim_{x \to p} h(x) = b$.

5. En cada caso, determinar $\lim_{x\to a} f(x)$ (asumiendo que existe tal límite):

$$a)\ \lim_{x\to 3}\frac{2f(x)}{x}=1,\ a=3 \qquad b)\ \lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2}=1,\ a=-2 \qquad c)\ \lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{\sqrt{x}}=1,\ a=4$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin(x)}=5,\ a=0 \qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{e^x-1}=3,\ a=0 \qquad f)\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\log(x)}=1,\ a=1$$

$$g)\ \lim_{x\to 2}\frac{f(x^3)-1}{x}=1,\ a=8 \qquad h)\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x^3+1)}{x^2+1}=1,\ a=2$$

6. En cada caso, determinar $\lim_{x\to a} f(x)$ (asumiendo que existe tal límite):

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2f(x)-1}}{f(x)}=1,\ a=0 \qquad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2f(x)-x}}{f(x)}=1,\ a=1$$

7. **Funciones monótonas**

   Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función monotona creciente y $a\in\mathbb{R}$.

   a) Probar que, dado $d>0$, el conjunto $C_d=\{f(x): 0<x-a\le d\}$ está acotado.

   b) Verificar que si $d_1<d_2$, entonces $C_{d_1}\subset C_{d_2}$. En particular, $\inf(C_{d_1})\ge \inf(C_{d_2})$ y $\sup(C_{d_1})\le \sup(C_{d_2})$.

   c) Probar que $\sup(C_{d_i})\le f(a+d_i)$ e $\inf(C_{d_1})\ge f(a)$.

   d) Verificar que, dado $\epsilon>0$, existen $y_\epsilon\in C_d$ y $x_\epsilon>a$ tal que $y_\epsilon-\inf(C_d)=|y_\epsilon-\inf(C_d)|\le\epsilon$ y $f(x_\epsilon)=y_\epsilon$. Sea $\delta=x_\epsilon-a>0$, probar que para todo $x\in C_\delta$ se tiene que $f(x)-\inf(C_\delta)=|f(x)-\inf(C_\delta)|\le\epsilon$.

   e) Deducir que existe el límite $\lim_{x\to a^+} f(x)$. Mostrar de forma análoga que existe el límite $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

   f) Dar un ejemplo de una función monótona tal que no existe el límite $\lim_{x\to 0} f(x)$.

4.3. Cálculo de límites

*Esta sección está orientada al cálculo de límite por lo que podrán asumir la continuidad de los polinomios, la función raíz cuadrada y la función logaritmo (muchas de las cuales ya probaron o se vieron en teórico). Además, se asumirá la continuidad de las funciones trigonométricas en su dominio (*sin, cos, tan*), así como la desigualdad* $|\sin(x)|\le|x|$.

1. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+2}{x^2+4} \qquad b)\ \lim_{x\to 2}\sqrt{x-1}+1 \qquad c)\ \lim_{x\to 2}\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x}{x}$ *e*) $\lim\limits_{x\to 1} \log(x) + x$ *f*) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) + \cos(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ *h*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-2x^3}{x^3-x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ *j*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ *k*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-x}{x-1}$

l) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ *m*) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ *n*) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$

2. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor$ *b*) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{(\lceil x\rceil - x)^3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|(x-1)^3|}{(x-1)^2}$ *d*) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x^4-6x^3+12x^2-8x|}{x^5-5x^4+6x^2+4x-8}$ *e*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|^2-|x|}{|x^2-x|}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left\lceil \dfrac{1}{x} \right\rceil$ *g*) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil}$ *h*) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$

3. Sean $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \lfloor x\rfloor$ y $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Determinar para que valores de a existe el límite
$$\lim_{x\to a} \frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$

4. **Polinomios**

Sean $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos polinomios, definidos por $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $Q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ con $a_n \neq 0 \neq b_m$.

Suponga que $a \in \mathbb{R}$ es raíz de P y Q. Se tiene así que $P(x) = P_1(x)(x-a)^{n_1}$ y $Q(x) = Q_1(x)(x-a)^{m_1}$, donde $P_1(a) \neq 0 \neq Q_1(a)$, por lo tanto la multiplicidad de a como raíz de P y Q es n_1 y m_1 respectivamente. Probar que:

a)
$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ si y sólo si } n_1 > m_1$$

b)
$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(a)}{Q_1(a)} \text{ si y sólo si } n_1 = m_1$$

c)
$$\lim_{x\to a^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \text{ o } -\infty \text{ si y sólo si } n_1 < m_1$$

d) Calcular el límite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

e) Probar que, dado un polinomio P, siempre existe el límite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)-P(a)}{x-a}$.

5. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

$$a)\quad \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad b)\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)^2}{x} \qquad c)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$$

6. Calcular las indeterminaciones de logaritmo

$$a)\quad \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} \qquad b)\quad \lim_{x\to 0^+} x^a\log(x):\ a>1$$

7. Calcular el límite $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log(x)$

4.4. Límites en infinito

1. Construir ejemplos explícitos de funciones que verifiquen los siguientes límites:

$$a)\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \qquad b)\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$c)\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \qquad d)\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=1,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=3$$

$$e)\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=1,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \text{ y } f \text{ no constante}$$

2. **Polinomios II**

   Sean $P,Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos polinomios, definidos por $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ y $Q(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ con $a_n\neq 0\neq b_m$ Probar que:

   a)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}=0 \text{ si y sólo si } n<m$$

   b)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_n}{b_m} \text{ si y sólo si } n=m$$

   c)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}=\text{signo}(a_n b_m)\infty \text{ si y sólo si } n>m$$

   d) Calcular los siguientes limites

$$a)\quad \lim_{x\to+\infty} 2x+3-(2(x+5)+3) \qquad b)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+3}{(2(x+5)+3)}$$

$$c)\quad \lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 - x^2 \qquad d)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

$$e)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-10x-1}{10x^2+1} \qquad f)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{10x^2+1}{x^3-10x-1} \qquad g)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{100x^2+x}{x^3-100x}$$

3. Decimos que una función tiene como *asíntota* a la recta r cuando x tiende a infinito si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - r(x) = 0$$

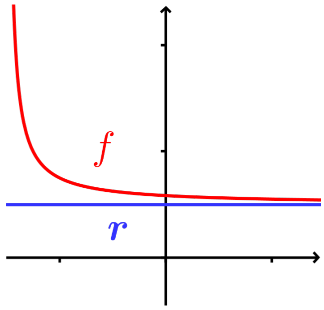


Figura 4.1: Ejemplo gráfico de una asíntota

Determinar si las siguientes funciones tienen asíntota en $+\infty$ y, en caso de tener, calcularlas.

$$a)\quad f(x) = \frac{1}{x} \qquad b)\quad f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad c)\quad f(x) = \frac{3x+3}{2x-4}$$

$$d)\quad f(x) = \arctan(x) \qquad e)\quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad f)\quad f(x) = \frac{\cos(x)+\sin(x)}{x^2}$$

$$g)\quad f(x) = \frac{x^3+x^2+x+1}{2x^2+x+1} \qquad h)\quad f(x) = \frac{x^2+1}{3x-1} \qquad i)\quad f(x) = \frac{5x^2+x+1}{x+1}$$

4. **Funciones de Lipschitz**

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función de Lipschitz

Probar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0, \forall n > 1$$

Deducir que si P es un polinomio y es una función de Lipschitz, entonces $P(x) = ax + b$.

5. Dé un ejemplo de función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} \lfloor f(x) \rfloor = a \in \mathbb{R}$ pero que no exista el límite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Dé un ejemplo de función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$ pero que no exista el límite $\lim_{x\to+\infty} \lfloor f(x) \rfloor$.

6. Determinar existencia de los siguientes límites y, en caso de existencia, calcularlos.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \lfloor x+1\rfloor - \lfloor x\rfloor \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} \lfloor x+1/2\rfloor - \lfloor x\rfloor \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty} \lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty} \lfloor 2x\rfloor - \lfloor x\rfloor \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor 2x\rfloor}{2} - \lfloor x\rfloor \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty} 2x - \lfloor 2x\rfloor$$

7. Determinar existencia de los siguientes límites y, en caso de existencia, calcularlos.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} x\cos(x) \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\sin^2(x)}{x^2+x+1}$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{2x^6+x^5+1}} \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}}$$

$$g)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} \qquad h)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^n} \qquad i)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+e^x}}{x^3+2x+2}$$

8. Determinar existencia de los siguientes límites y, en caso de existencia, calcularlos.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+x} \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^4-1}-\sqrt{x^4+4x^2}$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty} \sin(x+1)-\sin(x) \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty} \log(x+1)-\log(x) \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty} e^{x+1}-e^x$$

9. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(t)=\lfloor t\rfloor$

   Determinar existencia de los siguientes límites y, en caso de existencia, calcularlos.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)\,dt \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty} \int_0^x t-f(t)\,dt$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^3} \qquad f)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}$$

$$g)\ \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt - \frac{x(x-1)}{2}$$

10. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función monótona.

    a) Probar que si f está acotada, entonces existe el límite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y es finito.

    b) Probar que si f monótona creciente y no está acotada superiormente, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

    c) Dar un ejemplo de una función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ acotada tal que no exista el límite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4.5. Continuidad

1. Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones continuas, donde además se tiene la siguiente información

x	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	4	2	3	4	0	7	2	1
g(x)	5	3	1	0	7	6	4	2

Calcular los siguientes limites

$$a)\quad \lim_{x\to 5} f(x-2)+g(x+2) \qquad b)\quad \lim_{x\to 1} f(g(x))-g(f(x))$$

$$c)\quad \lim_{x\to 1} f(g(x)+1)-2g(x+2) \qquad d)\quad \lim_{x\to 1} g(f(x)+1)-2f(x+2)$$

2. Determinar en qué puntos son continuas las siguientes funciones:

   a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]$ (la distancia al entero más cercano)

   b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lfloor x\rfloor$

   c) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lfloor 1/x\rfloor$.

   d) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$.

   e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=$ el primer número del desarrollo decimal de x.

   f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=$ el número de sietes del desarrollo decimal de x si este número es finito y cero en el caso contrario.

3. Determinar para qué $a,b\in\mathbb{R}$ la función f es continua

$$a)\quad f(x)=\begin{cases} x^2+3x+2 & \text{si } x\le 1\\ ax^2+bx+1 & \text{si } x>1\end{cases} \qquad b)\quad f(x)=\begin{cases} \log(x+1) & \text{si } x>0\\ (x+a)^2 & \text{si } x\le 0\end{cases}$$

$$c)\quad f(x)=\begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x<1\\ ax+b & \text{si } 1\le x\le 2\\ x^2 & \text{si } x>2\end{cases} \qquad d)\quad f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x>0\\ a\sin(x+b) & \text{si } x\le 0\end{cases}$$

$$e)\quad f(x)=\begin{cases} 2\cos(x) & \text{si } x\le \pi\\ ax^2+b & \text{si } x>\pi\end{cases} \qquad f)\quad f(x)=\begin{cases} ax^2 & \text{si } x\le 1\\ a^2x^2-2 & \text{si } x>1\end{cases}$$

4. Determinar la existencia y calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$ en los siguientes casos

$$a)\quad f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional}\\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional}\end{cases} \qquad b)\quad f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional}\\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional}\end{cases}$$

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Probar que f no es continua en 0.

6. a) Si f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, demostrar que f es continua en cero.

   b) Si g es una función continua en 0, $g(0) = 0$ y $|f(x)| \leq |g(x)|$, demostrar que f es continua en cero.

   c) Probar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   es continua en 0.

7. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}, \text{ para } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a) Bosquejar el gráfico de f y deducir que $0 < f(x) < x$, $\forall x \in (0,1]$.

   b) Probar que f es continua en $x = 0$.

8. Sean C_1 el círculo de ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y C_2 el círculo de centro $(0,0)$ y radio r. Notamos P el punto $(0,r)$ (punto superior de C_2) y Q el punto superior de la intersección entre C_1 y C_2. Finalmente definimos R el punto de intersección de la recta PQ y el eje x. Notar que el punto R es una función del radio de C_2, es decir r.

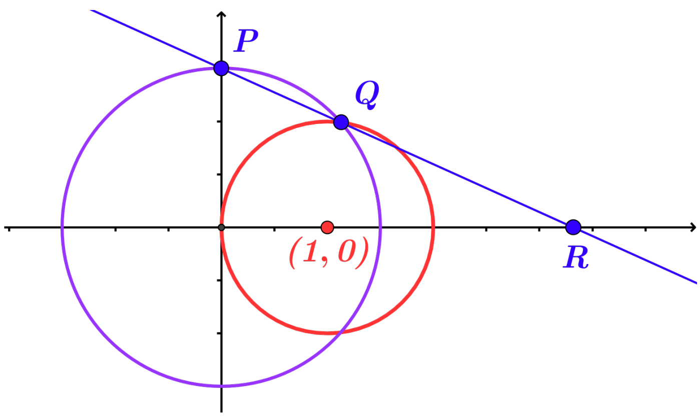


Figura 4.2: representación geométrica del problema

¿Qué ocurre con R cuando $r \to 0^+$?

9. **Funciones monótonas**

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente. Definimos $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $g(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y $h(a) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

   Probar que g es continua por derecha, es decir, $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = g(a)$.

   Probar que h es continua por izquierda.

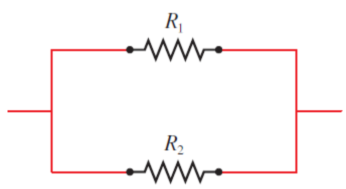
4.6. Aplicaciones

1. **Circuitos eléctricos**

   a) La ley de Ohm para circuitos eléctricos como el que se muestra en la figura establece que $V = RI$. En la ecuación, V es una constante de voltaje (en volts), I es la corriente (en amperes) y R es la resistencia (en ohms). A la empresa en donde trabaja le han pedido que sustituya las resistencias por un circuito en donde V sea de 120 voltios, e I sea de $5 \pm 0{,}1$ amperes. ¿En qué intervalo debe encontrarse R para que I esté a menos de 0,1 amperes del valor $I_0 = 5$?

   b) Si dos resistencias eléctricas con resistencias R_1 y R_2 respectivamente, se conectan en paralelo, entonces la resistencia total R está dada por $R = \dfrac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$.

   Suponga que se fija la resistencia R_2 con $R_2 = 10$ ohms, calcule la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donde $f(x)$ = la resistencia de tomar $R_1 = x$ ohms.

   Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interprete estos resultados.

2. Se quiere construir un círculo de área 4m^2. Calcular el radio de dicho círculo. Admitiendo una tolerancia al error en el área de $\pm 0{,}1\text{m}^2$, determinar la tolerancia de error en el radio de dicho círculo.

3. Tenemos una caja de madera de masa m apoyada en el suelo (también de madera) en reposo. Empezamos a aplicarle una fuerza, digamos $F_1(t) = tN$ (una cantidad de t Newton en el instante t). Al principio la caja no se moverá, esto es debido a la fuerza de rozamiento que ejerce el suelo sobre la caja contraresta la nuestra, obteniendo así que la fuerza neta sobre la caja sea 0. A la fuerza de fricción que el piso ejerce sobre la caja cuando esta está en reposo se le llama *fuerza de rozamiento estática*.

   Cuando se sobrepasa un valor crítico $\mu_s mg$, la caja empieza a moverse y la fuerza de rozamiento pasa a ser dinámica $\mu_k mg$.

   En este caso $\mu_s = 0{,}7$ y $\mu_k = 0{,}4$, estas constantes están determinadas por el material de las superficies (en este caso ambas de madera).

   a) Bosquejar la función $F_1(t)$, la fuerza que ejercemos sobre la caja, y determinar en que puntos es continua.

   b) Bosquejar la función $F_2(t)$ la fuerza que ejerce el suelo sobre la caja. En que puntos F_2 es continua.

   c) Bosquejar $F(t)$ la fuerza resultante sobre la caja y determinar en que puntos es continua.

   d) Definimos la función $x(t)$ la función posicion de la caja en funcion del tiempo. Discutir sobre como podria ser el bosquejo del desplazamiento de la caja. En que puntos esta función seria continua.

4. Relatividad

   a) Contracción de Lorentz
   En la teoría de relatividad, la fórmula de de la contracción de Lorentz

   $$L = L_0\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

   expresa la longitud L de un cuerpo como función de su velocidad v con respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del cuerpo en reposo y c es la velocidad de la luz.

   1) Calcule $\lim\limits_{v\to 0} L(v)$
   2) Encuentre $\lim\limits_{v\to c^-} L(v)$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario un límite izquierdo?

   b) En la teoría de relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

   $$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

   donde m_0 es la masa de la particula en reposo y c es la velocidad de la luz. ¿Qué ocurre cuando $v \to c^-$?

5. La fuerza de gravedad ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(x) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3} & \text{si } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G es la constante gravitacional. ¿F es una función continua de r?

4.7. Complementarios

1. Describir todos los posibles casos de límites para cocientes de polinomios.
2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que g es estrictamente creciente y continua.

   Probar que $\lim\limits_{x \to g(a)} f(x)$ existe si solo si $\lim\limits_{x \to a} f \circ g(x)$ existe.
3. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x}}{2x-1} \qquad b) \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - x}{\sqrt{x} - 1}$$

$$c) \quad \lim_{x \to +\infty} \sin\left(\sqrt{x+1}\right) - \sin\left(\sqrt{x}\right) \qquad d) \quad \lim_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}}$$

4. Primer parcial, segundo semestre 2012, MO

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ para todo $x \neq 1$ y $f(1) = 0$. Sea $B^*(1, \delta) = \{x : 0 < |x-1| < \delta\}$. Se realizan las siguientes afirmaciones:

   (I) Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen $x_1, x_2 \in B^*(1,\delta)$ con $|f(x_1) - f(x_2)| > \epsilon$.

   (II) Dado $\epsilon > 0$ cualquiera existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B^*(1,\delta)$ entonces $|f(x) - 1| < \epsilon$.

   (III) Cualquiera sea $\epsilon > 0$, no es posible hallar $\delta > 0$ tal que si $|x - x'| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x')| < \epsilon$

   (IV) Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

   Entonces:

   (A) Solamente la afirmacion (I) es verdadera.

   (B) Solamente la afirmacion (II) es verdadera.

   (C) Solamente las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

   (D) Solamente la afirmacion (IV) es verdadera.

(E) Solamente las afirmaciones (IV) y (II) son verdaderas.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ con } \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \end{cases}$$

   Probar que es discontinua en $\mathbb{Q}$ y continua en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

6. **Límites trigonométricos**

   La idea de este ejercicio es deducir do forma geometrica algunas desigualdades trigonometricas y a apritr de ellas calcular algunas indeterminaciones trigonometricas.

   a) A partir de la figura 4.3 deducir que $0 \le \sin(x) \le x \le \sin(x) + 1 - \cos(x)$ para $x \in [0, \pi/2]$.

   b) Utilizando que $(1-\cos(x))(1+\cos(x)) = \sin^2(x)$, probar que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$

   c) Probar que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

   d) Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\tan(x)}{x}$

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$. Probar que f es continua.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada.

   Sean $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$h(x) = \begin{cases} I_*(f, [0,x]) & \text{si } x \ge 0 \\ I_*(f, [x,0]) & \text{si } x < 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} I^*(f, [0,x]) & \text{si } x \ge 0 \\ I^*(f, [x,0]) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Probar que las funciones g y h son continuas.

9. Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Probar que existen los límites $\lim\limits_{x \to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x)$ y son iguales, entonces existe el limite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y además.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} f_2(x)$$

   De un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua solomente en 0.

10. **Funciones convexas**

    Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa.

    Probar que si f es monótona entonces es continua.

    Dar un ejemplo de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona y convexa que no sea continua.

    Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexas y g monótona creciente. Pruebe que $g \circ f$. Demuestre que si g no es monotona creciente, $g \circ f$ no es necesariamente convexa.