Clase 12 : $\begin{cases} 1^a \text{ parte} : \text{Integración} \\ 2^a \text{ parte} : \text{Límite y continuidad.} \end{cases}$

. Extensión de la definición de integral.

Ya definimos $\int_a^b f(t)\,dt$ cuando $a<b$.

Si $b<a \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt := -\int_b^a f(t)\,dt$

Si $a=b \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt := 0.$

Ejemplo: $\int_2^1 t^2\,dt = -\int_1^2 t^2\,dt = -\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{t=1}^{t=2}\right)$

$= -\left(8/3 - 1/3\right) = -7/3.$

Obs: La propiedad de linealidad:

$$\begin{cases} \int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt \\ \int_a^b \alpha f(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt \end{cases}$$

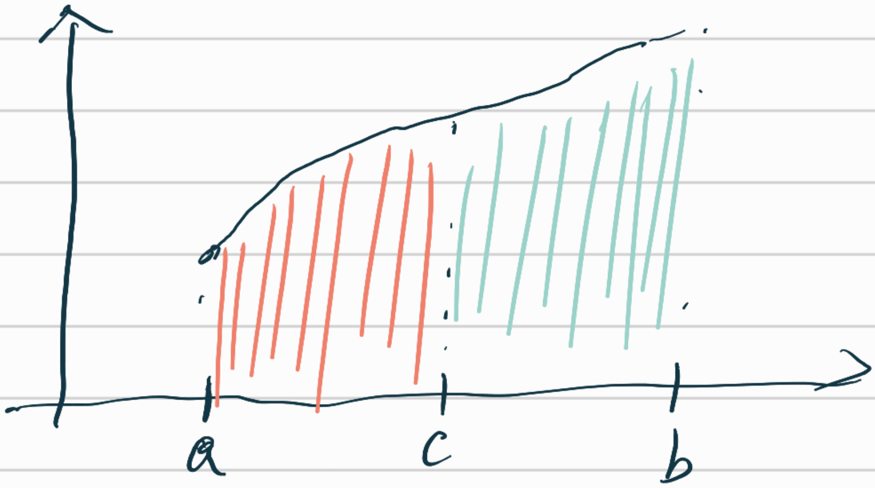
vale también si $a \geq b$

Ejercicio: Chequear esa propiedad.

Aditividad respecto a un intervalo

teo. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable y $c\in(a,b)$
$\Rightarrow f$ es integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$
y además:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$



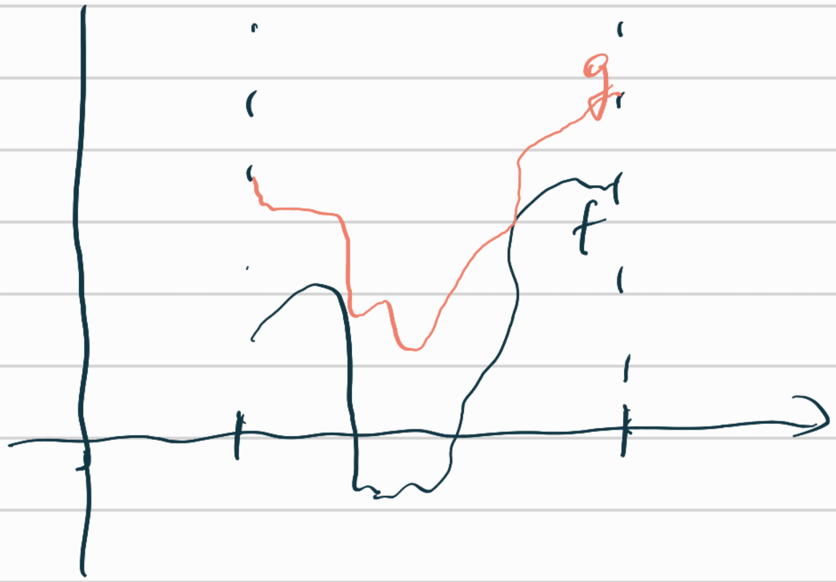
Ejercicio: Si $f: I\to\mathbb{R}$ es integrable y $a,b,c\in I$ entonces vale

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

(Asumiendo el teo. anterior)
Considerar si
$a\leq b\leq c$
$a\leq c\leq b$ ✓
$b\leq a\leq c$
$b\leq c\leq a$
$c\leq a\leq b$
$c\leq b\leq a$

Propiedad de monotonía y valor absoluto

Def: Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ escribimos $f \leq g$ para decir $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$.



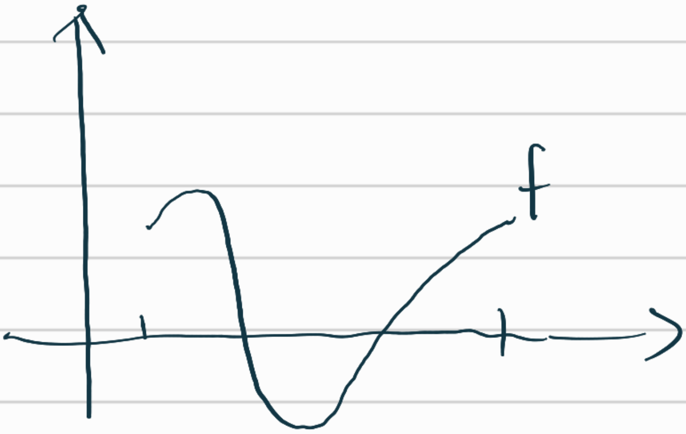
Teo: Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son integrables y además $f \leq g$ entonces

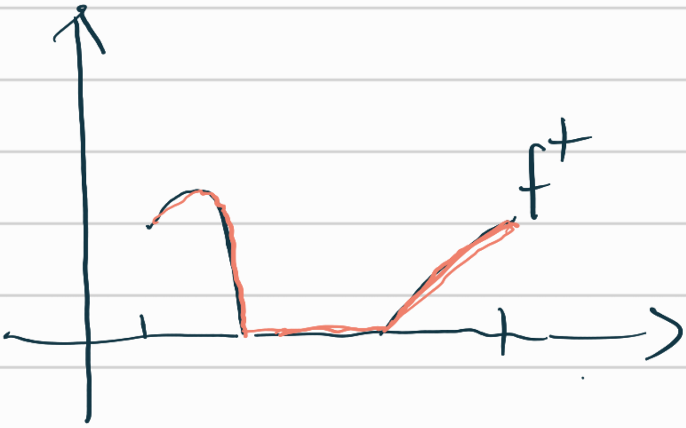
$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt \quad (a<b)$$

(a esta propiedad se le llama "monotonía de la integral")

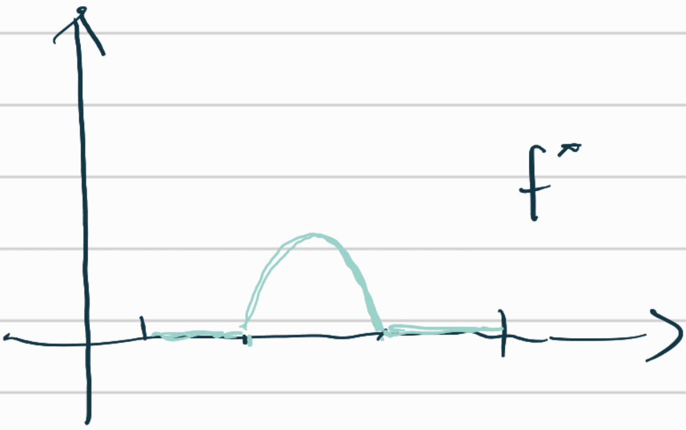
Corolario: Si $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \geq \int_a^b 0\,dt = 0$

Teo. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable entonces $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ y $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ también son integrables.





"parte positiva de f"



"parte negativa de f"

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\text{Obs}}: \quad & f^+(x) + f^-(x) = |f(x)| \\ & f^+(x) - f^-(x) = f(x) \end{aligned}}$$

$\underline{\text{teo.}}$ Si f es integrable en $[a,b] \Rightarrow |f|$ también y vale

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Dem. Como f^+ y f^- son integrables en $[a,b]$

$\Rightarrow |f| = f^+ + f^-$ también.

Y además, $-|f| \leq f \leq |f|$

$$\underset{\text{monotonía}}{\Rightarrow} \quad \underbrace{-\int_a^b |f(t)|\,dt}_{} \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \underbrace{\int_a^b |f(t)|\,dt}_{}$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt. \qquad \square$$

Translación, simetría y dilatación de funciones

Vamos a ver más adelante: Integración por sustitución: Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es derivable y g' es continua, f es continua en $Im(g)$

$$\int_a^b f(\underbrace{g(x)}_{u}) \cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Informal:

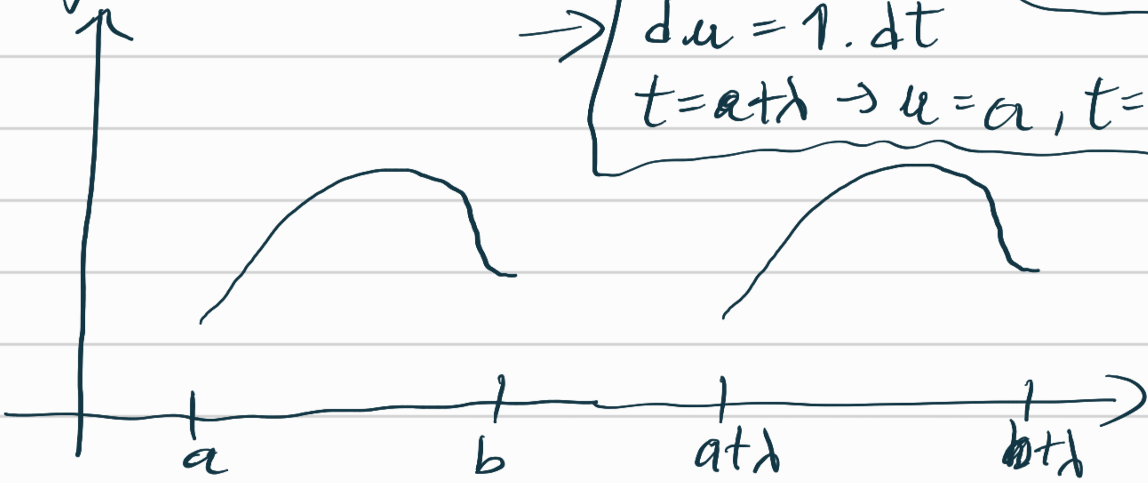
$$\boxed{\begin{array}{l} u = g(x) \\ du = g'(x)\,dx \\ x = a \to u = g(a) \\ x = b \to u = g(b) \end{array}}$$

Ejemplos:

Traslación: $\displaystyle\int_{a+\lambda}^{b+\lambda} f(\overbrace{t-\lambda}^{u})\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

($\lambda \in \mathbb{R}$ fijo)

$$\boxed{\begin{array}{l} u = t-\lambda \\ du = 1 . dt \\ t=a+\lambda \to u=a, \; t=b+\lambda \to u=b \end{array}}$$



Las integrales se mantienen por traslación

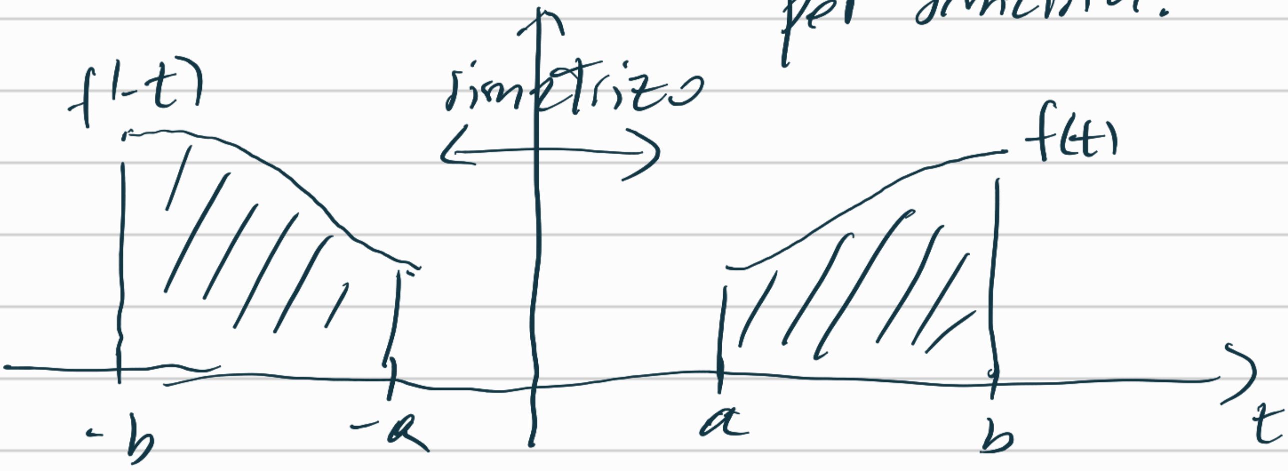
Simetría: $\displaystyle\int_{-b}^{-a} f(-t)\,dt = \int_b^a f(u).(-1)\,du$

$\displaystyle = -\int_b^a f(u)\,du$

$\displaystyle = \int_a^b f(u)\,du$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = -t \\ du = (-1)dt \\ t=-a \to u=a \\ t=-b \to u=b \end{array}}$$

La integral se mantiene por simetría.

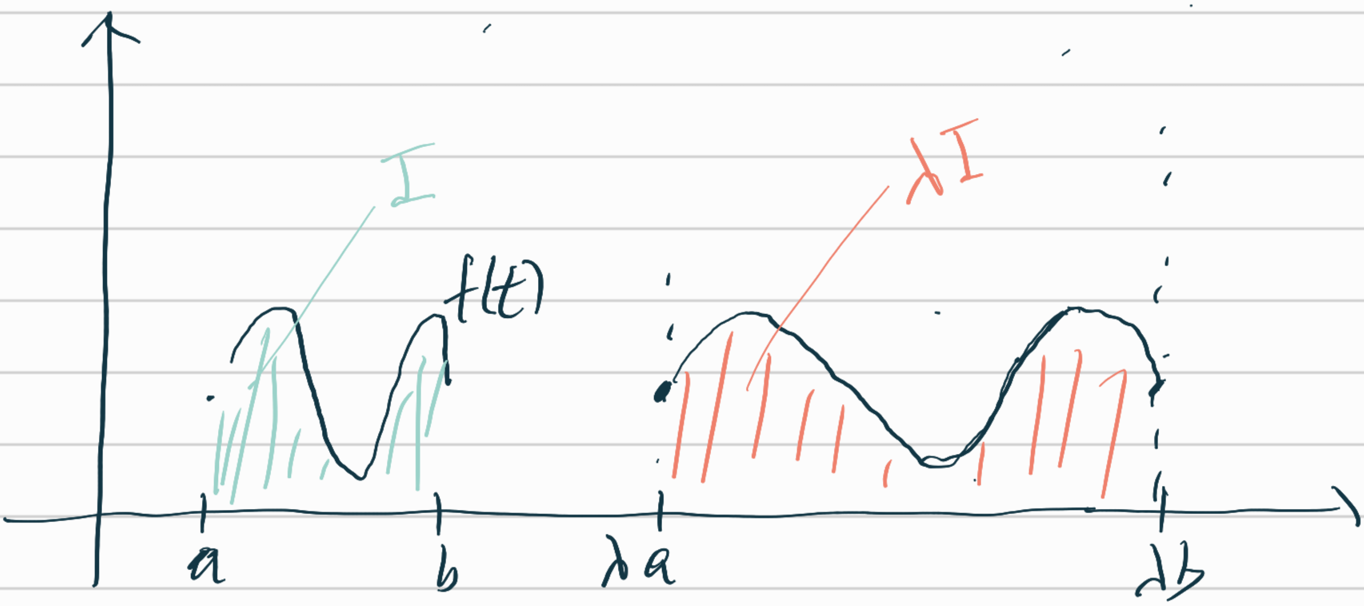


Dilatación: $\displaystyle\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(t/\lambda)\,dt = \int_a^b f(u)\,\lambda\,du = \lambda\int_a^b f(u)\,du$

($\lambda \in \mathbb{R}^+$ fijo)

$$\boxed{\begin{array}{l} u = t/\lambda = 1/\lambda \cdot t \\ du = 1/\lambda \cdot dt \to dt = \lambda\,du \\ t = \lambda a \to u = a \\ t = \lambda b \to u = b \end{array}}$$

El valor de la integral se multiplica por λ.



$[1, 2] \to [3, 6]$

$t \mapsto f(t/\lambda) \qquad t = \lambda a \mapsto f(a)$

> Todas las fórmulas anteriores se pueden probar sin usar substitución:
> Ver notas de integrales

Integral de $t \mapsto 1/t$ (logaritmo neperiano)

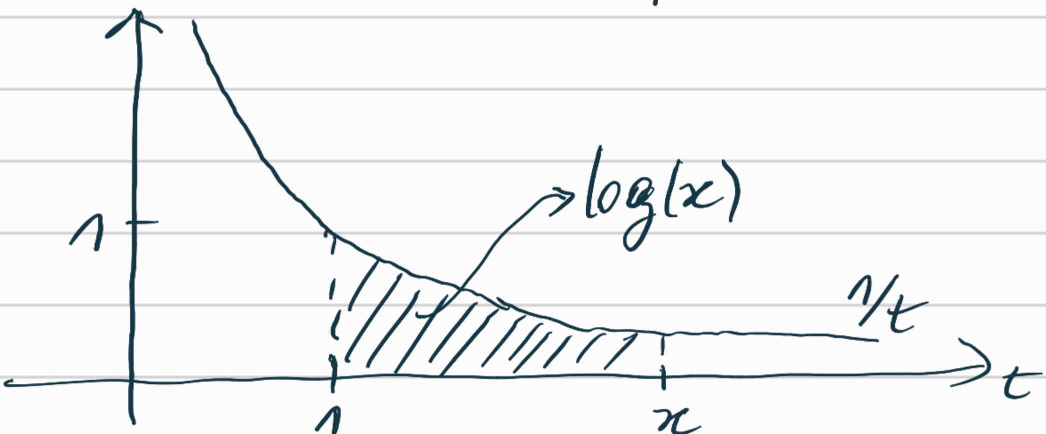
Obs: $f(t) = 1/t$ monótona decreciente en $(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ es integrable en cualquier intervalo $[a,b] \subseteq (0,+\infty)$

Prop. Si $a, b, \lambda > 0 \Rightarrow$ $$\int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{1}{t}\, dt = \int_a^b \frac{1}{t}\, dt$$

Dem. Por dilatación $$\lambda \int_a^b \frac{1}{t}\, dt = \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{1}{t/\lambda}\, dt$$
$$= \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{\lambda}{t}\, dt = \lambda \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{1}{t}\, dt$$

$$\overset{\lambda \neq 0}{\Longrightarrow} \int_a^b \frac{1}{t}\, dt = \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{1}{t}\, dt.$$

Def: Si $x > 0 \Rightarrow$ $$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$



Obs: $\log(x) = \begin{cases} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt > 0 & \text{si } x > 1 \\ \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0 & \text{si } x = 1 \\ \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt < 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Prop. si $x, y > 0 \Rightarrow \log(xy) = \log(x) + \log(y)$

Dem. $\log(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt \underset{\text{aditividad}}{=} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \int_{x\cdot 1}^{xy} \frac{1}{t}\,dt$

$\underset{\text{dilatación}}{=} \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \int_1^y \frac{1}{t}\,dt$

$= \log(x) + \log(y)$ $\square$

—— // ——

Límite y continuidad

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ se define

- $E(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

  "entorno de centro x_0 y radio ε"

- $E^*(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$

  "entorno reducido de centro x_0 y radio ε"

Def. Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, se define el interior $\mathring{I}$ y la clausura $\bar{I}$ como:

① $I = [a,b], (a,b], [a,b), (a,b) \Rightarrow \mathring{I} = (a,b)$
$\bar{I} = [a,b]$

② $I = (-\infty, b], (-\infty, b) \Rightarrow \mathring{I} = (-\infty, b)$
$\bar{I} = (-\infty, b]$

③ $I = [a, +\infty), (a, +\infty) \Rightarrow \mathring{I} = (a, +\infty)$
$\bar{I} = [a, +\infty)$

④ $I = \mathbb{R} \Rightarrow \mathring{I} = \bar{I} = \mathbb{R}$

⑤ $I = \{a\} \Rightarrow \mathring{I} = \phi$, $\bar{I} = \{a\}$

⑥ $I = \phi \Rightarrow \mathring{I} = \bar{I} = \phi$.