

Elemento de Treliça Sistemas de Coordenadas Local e Global

Barras de Treliça – estudando os elementos unidimensionais e generalizando conceitos para as diversas aplicações do método dos elementos finitos.

3.1. ELEMENTO DE BARRA ARTICULADA NAS EXTREMIDADES – TRELIÇAS RIGIDEZ AXIAL

Neste capítulo iniciaremos o estudo do segundo elemento finito que fará parte da Biblioteca de Elementos que estamos construindo: o *Elemento de Treliça ou Barra articulada nas extremidades*. À semelhança do Elemento de Mola, desenvolvido no capítulo anterior, mais uma vez aproveitaremos o estudo de um elemento simples para identificarmos muitas propriedades que são válidas para todos os tipos de elementos.

Sabemos do estudo da Resistência dos Materiais Elementar, que uma Treliça consiste de uma série de elementos estruturais retos, de comprimento muito maior que as dimensões de sua seção transversal, e que conectados uns aos outros em suas extremidades compõem uma *Estrutura Reticulada*, como mostra a figura 3.1. A particularidade importante das treliças é que as *juntas estruturais*, ou seja, o encontro discreto de dois ou mais membros do conjunto, *são articuladas*. As *forças externas atuantes* em uma estrutura na forma de treliça são aplicadas nas juntas estruturais, ou como vimos no capítulo 1, *nos Nós*. Excepcionalmente, uma barra de treliça poderá estar sujeita a Cargas atuando no interior do membro, ou seja, entre os nós. Porém, para propósitos de análise, essas cargas poderão ser substituídas por cargas estaticamente equivalentes atuando nos nós, as Cargas Nodais Equivalentes, citadas no capítulo 1.

A figura 3.1 representa alguns exemplos de estruturas treliçadas. No caso (a), temos uma *Treliça Plana*, em que todas as barras estão em um mesmo plano, e as Forças Aplicadas atuam também no plano da estrutura. No caso (b), temos uma *Treliça Espacial*, em que as barras podem ter qualquer direção no espaço. Neste caso, as forças atuantes nos Nós podem ter também direções arbitrárias no espaço. Em função das hipóteses adotadas quanto à união dos elementos, e pelo fato de as Cargas atuarem somente nos nós, um aspecto básico é fundamental para o estudo desses tipos de elementos estruturais, e já conhecido da Resistência dos Materiais: *As Barras de Treliça transmitem apenas Forças Axiais de Tração ou Compressão, isto é, na direção da Barra*. Para este elemento não são contabilizados esforços decorrentes da ação de momentos flettores, torçores e forças cortantes, que serão estudados posteriormente para as estruturas na forma de *Pórticos*. Assim, o Elemento de Treliça contabiliza apenas a *Rigidez Axial do Membro Estrutural*.

Para o estudo de uma estrutura completa na forma de treliça, utilizaremos a técnica geral estabelecida nos capítulos 1 e 2. Objetiva-se determinar a configuração deformada da estrutura inteira por intermédio dos deslocamentos nodais. Deve-se, portanto, conhecer a Rigidez da Estrutura inteira, que deverá ser contabilizada a partir do conhecimento da rigidez de cada elemento, isto é, o processo de montagem generalizado na figura 2.13 será repetido para a estrutura na forma de Treliça.

A base para resolver essa montagem está então na **formulação do Elemento de Treliça**, por intermédio de sua **Matriz de Rigidez**, seguindo o mesmo procedimento do capítulo anterior. Para isso, é fundamental o entendimento de como as Forças internas em uma barra de treliça se relacionam com as deformações. Como vimos no capítulo 2, as relações que traduzem o comportamento físico do elemento são "importadas" do estudo da Resistência dos Materiais. No **Quadro III** é feita uma **breve revisão dos conceitos da Resistência dos Materiais** necessários para formular o Elemento de Treliça.

Convém ressaltar que o estudo das Treliças Planas permite estabelecer propriedades gerais que serão aplicadas também para as Treliças Espaciais. O estudo destas últimas envolve um trabalho de manipulação matemática muito maior, porém os conceitos físicos de formulação do elemento são os mesmos. Assim, desenvolveremos o nosso estudo para as treliças planas.

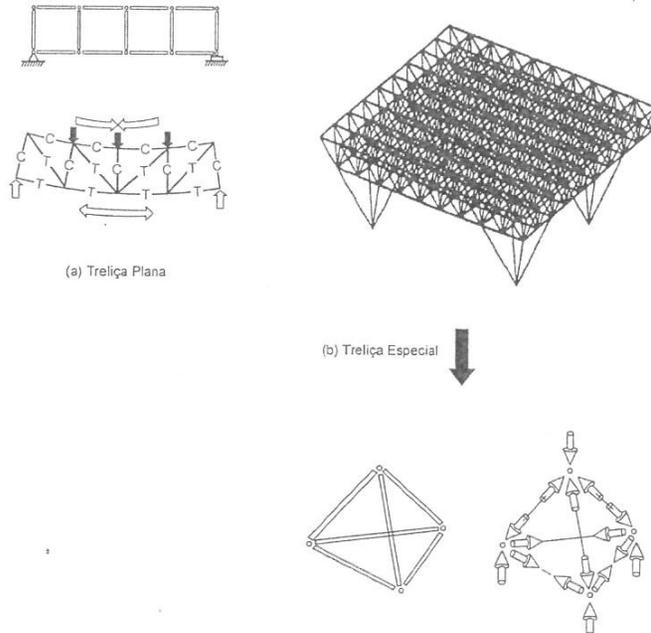
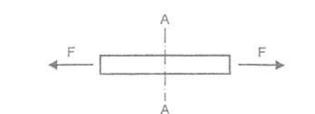


Figura 3.1 – As barras de treliça transmitem apenas forças axiais.

QUADRO III – REVISANDO A RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS - TENSÕES AXIAIS EM BARRAS

A **Barra de Treliça** está em Equilíbrio. Fazendo o corte A-A, os trechos I e II estão também em Equilíbrio. Justificamos o equilíbrio de cada trecho, representando a **FORÇA INTERNA**, no Diagrama de Corpo Livre. A Força Interna tem intensidade igual a F.



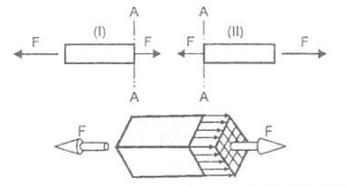
A Força F é distribuída sobre a **SEÇÃO INTEIRA DA BARRA**.

A **FORÇA AXIAL** distribuída uniformemente na Seção Transversal da Barra dá origem ao conceito de **TENSÃO AXIAL** ou **TENSÃO NORMAL** atuante na seção, isto é, a **FORÇA AXIAL POR UNIDADE DE ÁREA** (σ). Assim:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

A **DEFORMAÇÃO LINEAR MÉDIA** (ϵ) é baseada na dimensão original da Barra e definida por:

$$\epsilon = \frac{\text{variação de comprimento}}{\text{comprimento original}} = \frac{d}{L}$$

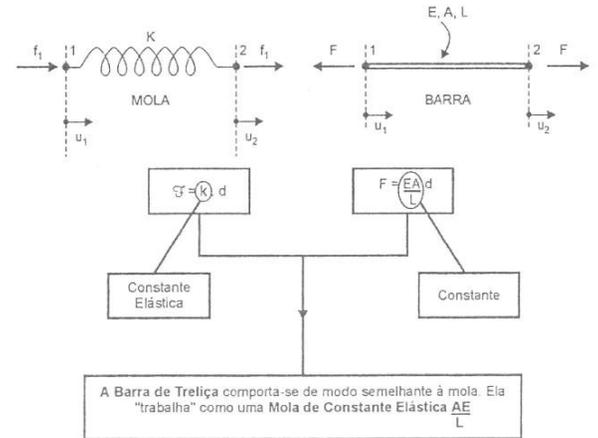


Para **Material de Comportamento Linear** a Tensão é Proporcional à Deformação. A constante de proporcionalidade é o **Módulo de Elasticidade do Material (E)** expresso pela **Lei de Hooke**. Assim:

$$\sigma = \epsilon \cdot E \quad \sigma = \frac{F}{A} = \epsilon \cdot E$$

Como: $\epsilon = \frac{d}{L}$ $\frac{F}{A} = \frac{d}{L} \cdot E$ $F = \frac{E \cdot A}{L} \cdot d$

Comparando uma **BARRA DE TRELIÇA** com a **MOLA** estudada anteriormente, temos:



Portanto, a Constante $\frac{AE}{L}$ define a **RIGIDEZ AXIAL DA BARRA**.

3.2. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA

A figura 3.2 representa uma Treliça Plana. Nela identificamos um dos seus elementos, conectado ao resto da estrutura pelos seus Nós, posicionados nas extremidades da barra. O estudo do comportamento físico do elemento pode ser efetuado isolando-o do resto da estrutura, isto é, por intermédio do seu **Diagrama de corpo livre**. Se a estrutura está em equilíbrio, o Elemento isolado também está, e podemos representá-lo nessa condição, indicando as forças que esse elemento troca com o resto da estrutura, isto é, o efeito do resto da estrutura no elemento. Note que, este procedimento é válido para todos os elementos representados no modelo. Como sabemos, cada uma das barras da treliça transmite apenas forças axiais, e assim, no âmbito isolado do elemento, o seu equilíbrio poderá ser representado pela ação de dois componentes de força.

Vimos que a Barra de Treliça comporta-se como uma Mola de constante Elástica $A.E/L$. Portanto, a Matriz de Rigidez de um Elemento de Barra será formulada de modo idêntico ao Elemento de Mola, substituindo os valores de k da matriz da mola pelos coeficientes de rigidez que definem a rigidez axial da barra. Dessa forma, no âmbito local do elemento, está definida a Matriz de Rigidez do Elemento de Barra. Observe que estamos reproduzindo a abordagem já definida anteriormente para os **Sistemas Discretos Padrão**, considerando apropriadamente em cada caso os componentes de força e os componentes de deslocamento que traduzem o comportamento físico do elemento. A relação entre eles expressa na forma matricial conduz à Matriz de Rigidez do Elemento. A seguir, é feita de forma esquemática a comparação dos elementos de mola e barra, definindo a **Matriz de Rigidez do Elemento de Barra**.

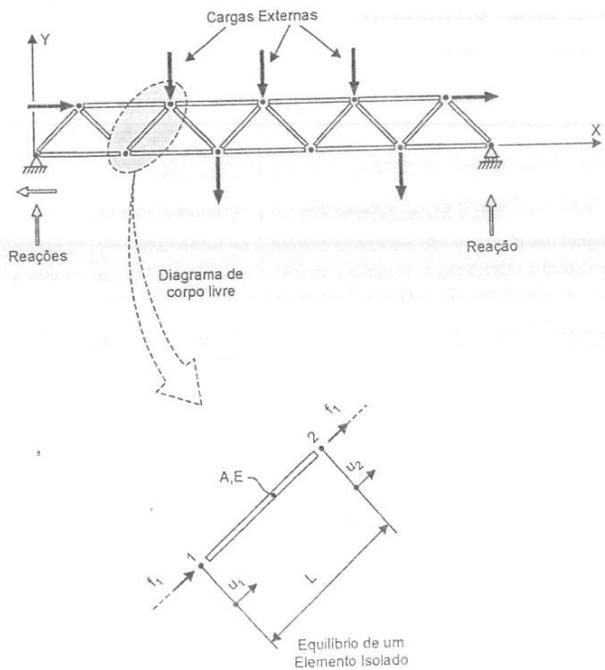


Figura 3.2 – No modelo da Estrutura, identificamos um elemento de Barra. Para este elemento, como para qualquer outro do modelo, o equilíbrio pode ser justificado por intermédio do Diagrama de Corpo Livre, indicando as Forças aplicadas pelo resto da estrutura no elemento. Em particular, para o Elemento de Barra de Treliça, temos dois componentes de força e dois deslocamentos presentes.

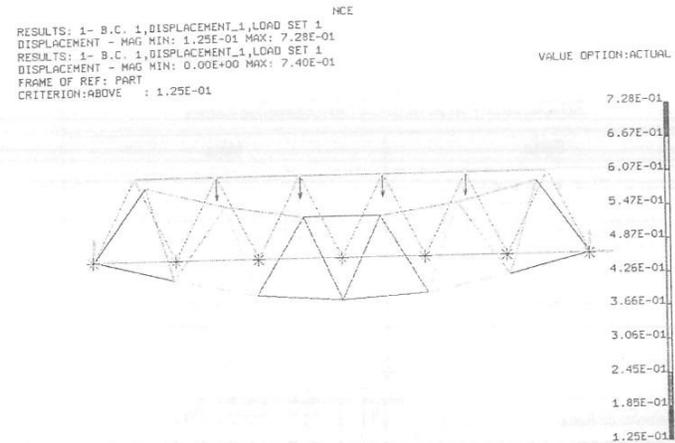
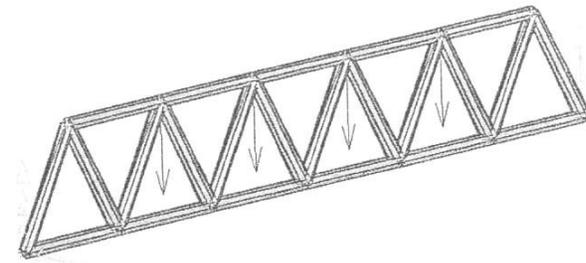
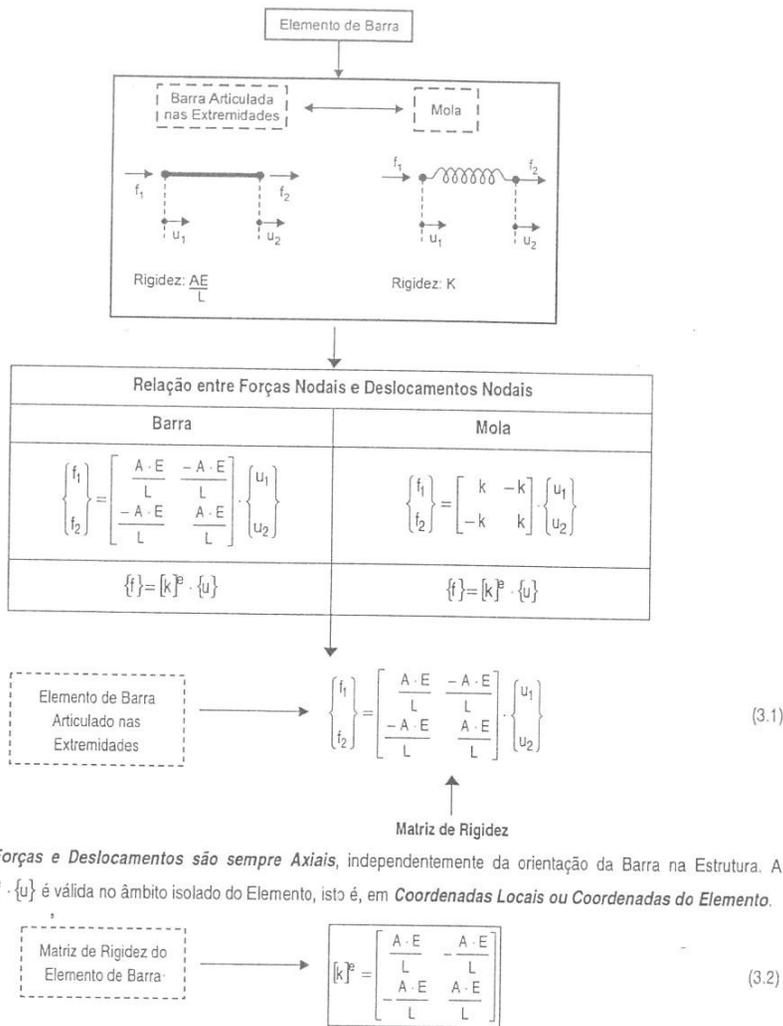


Figura 3.2 – Continuação – Uma visão no computador. Por intermédio de Técnicas Numéricas, como o Método dos Elementos finitos, pode-se determinar o comportamento estrutural de uma treliça, utilizando-se os softwares de análise disponíveis. Os programas de computador requerem o conhecimento das propriedades dos elementos de treliça, tais como a área da seção transversal de cada barra, o módulo de elasticidade de cada um dos elementos, etc. Conhecendo-se o carregamento atuante na forma de Força nos Nós, pode-se determinar a configuração deformada da estrutura, bem como as forças em cada uma das barras, estabelecendo-se previsões a respeito do seu comportamento. No caso de estruturas treliçadas de grandes pavilhões, a análise pelo método dos elementos finitos, oferece subsídios para efetuar a simulação das mais variadas formas de estruturas, permitindo estabelecer comparações de diversas configurações no âmbito do desenvolvimento do projeto, buscando a solução mais adequada e econômica, com bastante rapidez.



3.3. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO NOS SISTEMAS LOCAL E GLOBAL MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO

No procedimento de montagem da **Matriz de Rigidez de uma Estrutura**, estabelecido a partir das Equações de Equilíbrio e Compatibilidade, as Matrizes de Rigidez dos Elementos são superpostas adequadamente, seguindo um plano de montagem. Nesse procedimento são adicionados coeficientes de rigidez de acordo com os vetores de localização. Vimos que esse procedimento envolve basicamente **Soma de Forças**, em particular, Forças associadas a Deslocamentos Unitários. Assim, para determinar as propriedades de rigidez da estrutura completa, a partir da rigidez de cada elemento, as forças e os deslocamentos associados a

cada elemento individual devem ser relacionados a um **Sistema de Referência Comum**. Na figura 3.3 são representadas três barras da estrutura na sua condição de equilíbrio. Em (b), as Forças que equilibram cada uma das barras são representadas nas direções delas, já que esse elemento transmite apenas forças axiais.

Em um procedimento de montagem, a soma dessas forças deveria ser tratada vetorialmente. Uma forma de evitar essa dificuldade é representar o equilíbrio dos mesmos elementos, por intermédio da projeção dessas forças nos eixos X e Y, como indica a figura (c). Os componentes de força nesses eixos poderão ser superpostos algebricamente, tornando então o problema escalar. Assim, os componentes de força em X de uma barra poderão “**conversar**” ou se relacionar algebricamente com os mesmos componentes de outra, e, portanto, serem adicionados. Analogamente, para os componentes de força em Y.

Essa questão pode ser “**administrada**” por intermédio da definição de **dois Sistemas de Coordenadas** para se representar a montagem de elementos:

- **SISTEMA DE COORDENADAS “LOCAL”, ou do ELEMENTO.** Na figura 3.3.d é o sistema (x,y) representado em **letras minúsculas** por convenção. O **eixo local x** é definido no sentido do nó 1 para o nó 2 do elemento. Os deslocamentos na direção x são u_1 e u_2 , também em letras minúsculas.
 - **SISTEMA DE COORDENADAS “GLOBAL”, ou da ESTRUTURA.** É o Sistema de Referência Básico para Estrutura como um todo. Na figura 3.3.d é o Sistema (X,Y) representado em **letras maiúsculas** por convenção. A escolha desse Sistema é arbitrária. A posição do eixo x em relação ao eixo X é estabelecida por intermédio do ângulo α , medido de X para x, adotando como sentido positivo, o sentido anti-horário.
- Deve-se lembrar que para um elemento em equilíbrio:
- A Matriz de Rigidez de um Elemento é inicialmente definida no Sistema Local.
 - A matriz de Rigidez do Elemento representa a relação entre Forças e Deslocamentos no âmbito do elemento.
 - Os componentes de Força e Deslocamento são diferentes nos Sistemas Local e Global.
 - Portanto, a Matriz de Rigidez do Elemento será expressa de diferentes formas nesses sistemas.

Desde que as Matrizes de Rigidez dos Elementos são inicialmente calculadas em coordenadas locais, é necessário introduzir um procedimento de modo a transformar a representação do equilíbrio do elemento do sistema local para o sistema global. Ou seja, esse procedimento estabelece uma **Transformação de Forças de um Sistema para outro**. Ou seja:



Assim, ao formular o procedimento de montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura, deve-se primeiramente representar a Matriz de Rigidez de cada Elemento no Sistema Global, para fazer então a Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura.

Ao estabelecer a Transformação das Forças de um Sistema para outro e representá-la na Notação Matricial, temos um “**problema administrativo**” para resolver. A saber:

No **sistema local**, o equilíbrio é representado pelas **Forças f_1 e f_2** e os correspondentes **deslocamentos são u_1 e u_2** , como mostra a figura 3.3.d. Como temos dois componentes de forças e deslocamentos, a **Matriz de Rigidez tem dimensão 2 x 2**. Ao representar a mesma barra em equilíbrio no **Sistema Global**, por intermédio dos **Componentes de Força em X e Y**, temos **quatro componentes de força** que representam o equilíbrio do elemento, e quatro componentes de deslocamento também, pois um deslocamento u tem componentes também em X e Y, como mostra a figura 3.5. Assim, no Sistema Global a Matriz de Rigidez terá **dimensão 4x4**, e a equação matricial terá dimensões diferentes nos dois sistemas, e a correspondência entre elas ficará inconsistente.

Para resolver essa "questão administrativa" introduziremos um artifício, de forma que a matriz no sistema local, de dimensão 2x2, não se sinta menos "importante" que a sua correspondente no sistema global de dimensão 4x4. Vamos representar o equilíbrio da barra no sistema local por intermédio também de quatro forças, como mostra a figura 3.4. O componente f_x no eixo local x , e o componente f_y no eixo local y , porém sabendo que $f_y = 0$, pois a barra só transmite forças axiais. Esse artifício não altera as equações de equilíbrio, mas torna a representação da Matriz de Rigidez no Sistema local com dimensão 4x4. Assim, "hierarquicamente" essas matrizes são de mesma dimensão e poderão corresponder-se entre si. A representação das equações de equilíbrio na forma matricial será efetuada introduzindo zeros nas posições adequadas na matriz de rigidez, como é feito em seguida:

$$\begin{Bmatrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ f_{x_2} \\ f_{y_2} \end{Bmatrix} = \begin{matrix} A & E \\ & L \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

ou sendo

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ f_{x_2} \\ f_{y_2} \end{Bmatrix} \text{ e } \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

teremos:

$$\{f\} = [k] \cdot \{\delta\} \quad (3.3)$$

Forças Nodais no Sistema Local

Matriz de Rigidez no Sistema Local

Deslocamento Nodais no Sistema Local

Note que na equação matricial acima, devido à colocação dos zeros na matriz, o desenvolvimento do produto resultará no mesmo resultado obtido para a matriz de rigidez de dimensão 2x2, na equação 3.1, e reproduzirá $f_{y_1} = f_{y_2} = 0$.

Na figura 3.4, podemos efetuar a correspondência entre as Forças nos dois sistemas de referência, e que justificam o equilíbrio da barra. Projetando as Forças Globais nos eixos locais x e y , teremos a correspondência entre as Forças nos dois Sistemas. Assim:

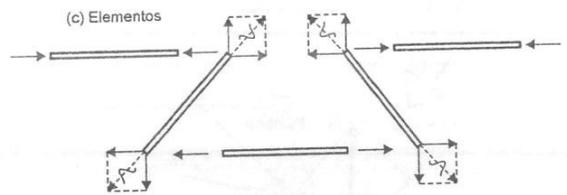
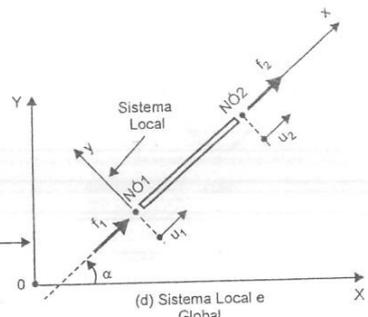
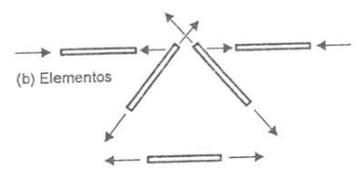
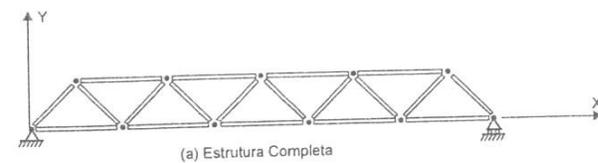


Figura 3.3 – Equilíbrio dos Elementos de uma estrutura expresso nos Sistemas Local e Global.

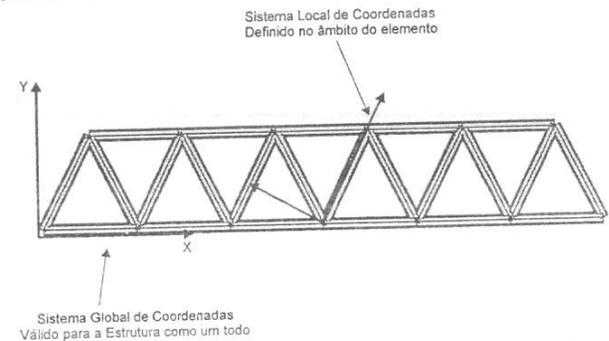


Figura 3.3 – Continuação – Representação do modelo de treliça no computador.

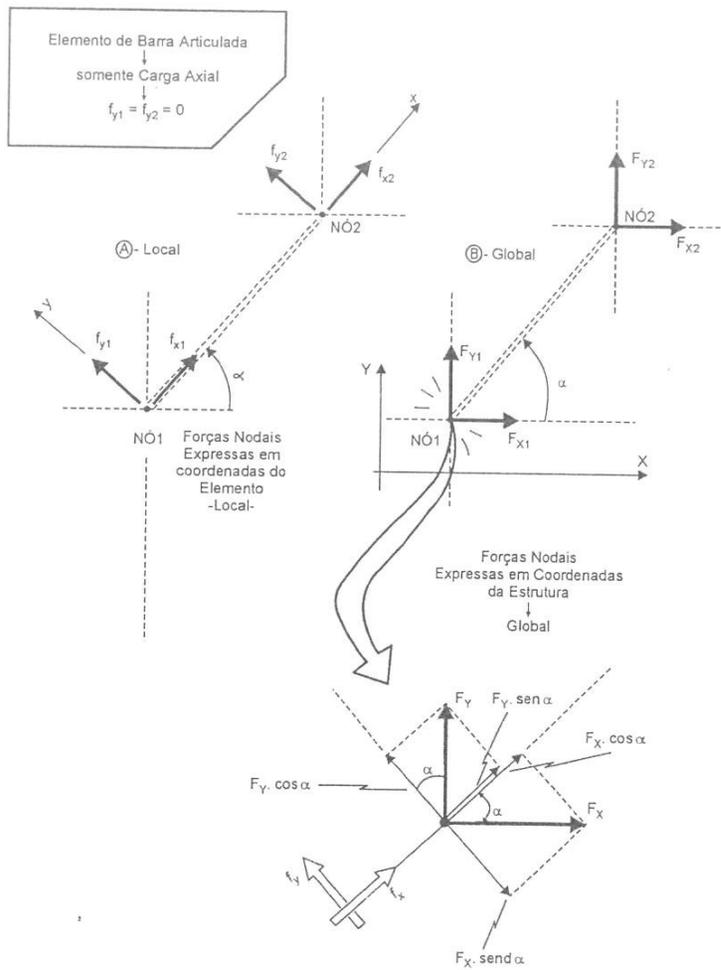


Figura 3.4 – O equilíbrio de um mesmo elemento é representado por intermédio de forças nodais nos sistemas local e global. Para cada nó, a projeção das Forças Globais nos eixos locais x e y permite estabelecer a correspondência entre elas.

$$\begin{cases} f_{x1} = F_{X1} \cdot \cos \alpha + F_{Y1} \cdot \text{sen} \alpha \\ f_{y1} = -F_{X1} \cdot \text{sen} \alpha + F_{Y1} \cdot \cos \alpha \\ f_{x2} = F_{X2} \cdot \cos \alpha + F_{Y2} \cdot \text{sen} \alpha \\ f_{y2} = -F_{X2} \cdot \text{sen} \alpha + F_{Y2} \cdot \cos \alpha \end{cases} \text{ e sendo } \begin{cases} \lambda = \cos \alpha \\ \mu = \text{sen} \alpha \end{cases}$$

Note que as equações não "nasceram" matriciais. Representando por conveniência computacional na Forma Matricial, teremos:

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Matriz que contém Forças Nodais no Elemento, no Sistema Local

Matriz que Transforma Forças do Sistema Global em Local, chamada de Matriz de Transformação

Matriz que contém as Forças Nodais no Elemento, no Sistema Global

$$\{f\} = [T] \cdot \{F\} \quad (3.5)$$

A **Matriz de Transformação** apresenta uma propriedade muito útil e que será utilizada adiante. Utilizando os conceitos sobre Matrizes do Quadro II - capítulo 2, pode-se demonstrar que a **Matriz Inversa da Matriz de Transformação é igual à sua Matriz Transposta**. Na notação matricial, temos:

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad (3.6)$$

Da mesma forma que foi estabelecida a relação entre forças nos sistemas local e global, é possível estabelecer também a **relação entre os componentes de deslocamentos nos dois sistemas**, pois à semelhança dos vetores força, teremos a relação entre os vetores deslocamento. Realmente, o deslocamento u de um nó no sistema local admite componentes U e V no Sistema Global, como ilustra a figura 3.5.

Para Sistemas Ortogonais, a relação entre os componentes de deslocamentos nos dois sistemas é semelhante à relação entre forças, da equação 3.5. Assim:

$$\{\delta\} = [T] \cdot \{\Delta\} \quad (3.7)$$

em que:

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Componentes de Deslocamento de um nó, no Sistema Global.}$$

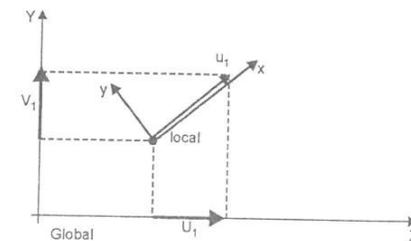


Figura 3.5 – O deslocamento u no Sistema Local apresenta componentes U e V no Sistema Global.

Já sabemos como transformar as Forças do Sistema Local no Sistema Global e vice-versa. Da mesma forma, conhecemos essas relações para os Deslocamentos. Vimos também que antes de efetuarmos a montagem da matriz de rigidez da estrutura, cada elemento deve ter sua matriz representada no sistema global, de modo que as forças que justificam o equilíbrio do elemento, expressas na forma unitária nas matrizes de rigidez, possam ser adicionadas algebricamente. Portanto, resta-nos estabelecer a relação entre forças nodais e deslocamentos nodais no Sistema Global, isto é, a Matriz de Rigidez do Elemento no Sistema Global. Partindo da relação $\{f\} = [k]^e \cdot \{\delta\}$, já conhecida para o Sistema Local, e utilizando as **relações de transformação entre forças nos dois sistemas**, poderemos estabelecer a relação entre **Forças e Deslocamentos Nodais no sistema global**, isto é, a **Matriz de Rigidez do Elemento no Sistema Global**. Assim:

$$\begin{aligned} \{f\} &= [k]^e \cdot \{\delta\} \quad \text{da equação (3.3) SISTEMA LOCAL} \\ \text{Equação 3.5} \quad \downarrow & \quad \downarrow \text{Equação 3.7} \\ [T] \cdot \{F\} &= [k]^e \cdot [T] \cdot \{\Delta\} \end{aligned}$$

Nesta última equação estão presentes as FORÇAS NO SISTEMA GLOBAL $\{F\}$ e os DESLOCAMENTOS NO SISTEMA GLOBAL $\{\Delta\}$. Assim, poderemos através desta relação obter a MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO NO SISTEMA GLOBAL. A equação anterior não será alterada multiplicando-se ambos os membros por uma mesma quantidade. Assim "pré-multiplicando" ambos os membros por $[T]^{-1}$ teremos:

$$\begin{aligned} [T]^{-1} \cdot [T] \cdot \{F\} &= [T]^{-1} \cdot [k]^e \cdot [T] \cdot \{\Delta\} \\ \downarrow & \\ \text{MATRIZ IDENTIDADE} & \\ [I] \cdot \{F\} &= [T]^{-1} \cdot [k]^e \cdot [T] \cdot \{\Delta\} \end{aligned}$$

Como $[I] \cdot \{F\} = \{F\}$ teremos: $\{F\} = [T]^{-1} \cdot [k]^e \cdot [T] \cdot \{\Delta\}$

O cálculo da Matriz Inversa $[T]^{-1}$ não será necessário, pois de (3.6) $[T]^{-1} = [T]^T$

Assim:

$$\{F\} = [T]^{-1} \cdot [k]^e \cdot [T] \cdot \{\Delta\}$$

Forças Nodais do Elemento no Sistema Global

Coeficiente entre Forças Nodais e Deslocamentos Nodais no Sistema Global, isto é, Matriz de Rigidez do Elemento no Sistema Global

Deslocamentos Nodais do Elemento no Sistema Global

Assim o produto das matrizes acima permita obter a Matriz de Rigidez de um Elemento de Barra no sistema Global.

$$[K]^e = [T]^T \cdot [k]^e \cdot [T] \quad (3.8)$$

Global
Local

Se fizermos a Multiplicação das Matrizes, teremos a Matriz de Rigidez de um Elemento de Treliça Plana, em função das **Propriedades Geométricas do Elemento** (A, L), e da **Propriedade do Material**, representada pelo seu **Módulo de Elasticidade**

E , levando-se em conta a posição da viga na estrutura, dada pelo ângulo α e contabilizada pelos valores do seno e cosseno desse ângulo. Como temos mais de um componente de deslocamento presente por nó, vamos utilizar a linguagem já introduzida dos **Graus de Liberdade do Elemento**. Dessa forma o Vetor de Localização continuará posicionando o elemento do nó 1 para o nó 2, porém destacando a contribuição de cada grau de liberdade na montagem da matriz. A identificação dos Graus de Liberdade do Elemento no Vetor de Localização segue uma ordem dentro do nó: primeiro é identificado o Grau de liberdade em X, e posteriormente em Y. Então, para o elemento da figura 3.6, teremos:

$[K]^e = \frac{A \cdot E}{L}$
Global

	Nó1		Nó2		
	U_1	V_1	U_2	V_2	
	λ^2	$\lambda\mu$	$-\lambda^2$	$-\lambda\mu$	Nó1
	$\lambda\mu$	μ^2	$-\lambda\mu$	$-\mu^2$	
	$-\lambda^2$	$-\lambda\mu$	λ^2	$\lambda\mu$	Nó2
	$-\lambda\mu$	$-\mu^2$	$\lambda\mu$	μ^2	

(3.9)

A aplicação numérica e a identificação da Numeração dos Graus de Liberdade dos Elementos em uma montagem com elementos de treliça serão feitas adiante por intermédio de um exercício. Ao efetuarmos a montagem de uma estrutura constituída por elementos de mola, os vetores de localização foram referidos à numeração dos nós no âmbito da estrutura inteira. Para a treliça, o mesmo ocorrerá com a identificação da numeração dos graus de liberdade para a estrutura inteira.

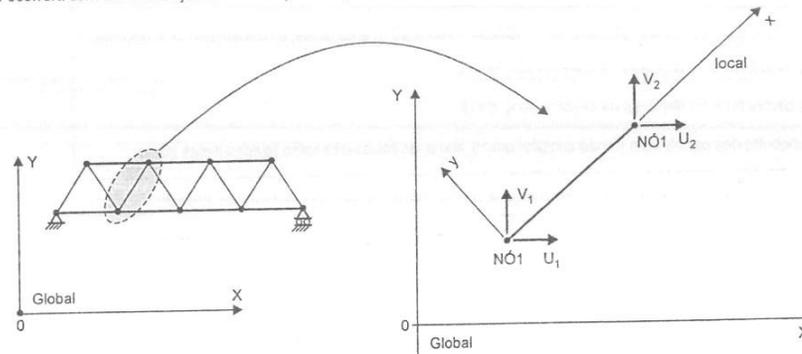
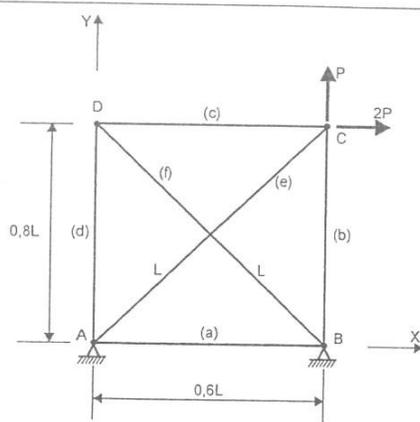


Figura 3.6 – Elemento de Barra de Treliça, considerando os Componentes de Deslocamentos no Sistema Global.

3.4. EXERCÍCIO DE APLICAÇÃO PARA ESTRUTURA NA FORMA DE TRELIÇA

Neste caso de Aplicação será resolvido um Modelo Estrutural constituído por uma **montagem de Elementos de Barra de Treliça Plana**, como indica a figura 3.7. Embora seja uma Estrutura Simples, aproveitaremos este exemplo para desenvolver a montagem de um modelo estrutural, considerando de forma geral o **conceito de Graus de Liberdade**. Iremos desenvolvê-lo de modo sistemático, aplicando numericamente todas as etapas tratadas anteriormente, e a partir deste exemplo poderemos estabelecer algumas generalizações importantes para as aplicações práticas de elementos finitos utilizadas no dia-a-dia com a utilização dos "softwares" de Análise, ampliando as idéias desenvolvidas a partir do elemento de mola.

São conhecidas as Forças atuantes na Estrutura e representadas na figura 3.7. Objetiva-se Calcular os Deslocamentos Nodais, em seguida as Reações nos vínculos ou Apoios da Estrutura, e finalmente as Forças Internas em cada um dos Elementos.



Dados:

$$P = 500 \text{ kgf}$$

$$E = 21000 \text{ kgf/mm}^2 \text{ para o Material de Todas as Barras.}$$

As barras (e) e (f) têm comprimento $L = 1000 \text{ mm} = \overline{AC} = \overline{BD}$ e área de seção transversal $A = 300 \text{ mm}^2$.

As barras (b) e (d) têm área de seção igual a $0,8 \cdot A$.

As barras (a) e (c) têm área de seção igual a $0,6 \cdot A$.

O encontro das barras (e) e (f) não constitui um nó, isto é, as barras não estão ligadas nesse ponto.

Figura 3.7 – Estrutura constituída por Barras de Treliça para Cálculo pelo Método dos Elementos Finitos.

3.4.1. DEFINIÇÃO DO MODELO ESTRUTURAL COMO UMA MONTAGEM DE ELEMENTOS

Deve-se *dividir a Estrutura Real em uma Montagem de Elementos*, que sejam adequados para simular o problema físico objeto de investigação. No modelo são identificados os Nós, entre os quais os elementos são definidos, isto é, entre os quais os elementos "trabalham".

Neste exemplo, o Modelo da Estrutura Reticulada surge naturalmente e corresponde à própria figura 3.7.

3.4.2. DETERMINE A MATRIZ DE RIGIDEZ DE CADA ELEMENTO E REPRESENTA-A NO SISTEMA GLOBAL

Vimos anteriormente que o elemento de treliça é definido por dois nós, e no âmbito isolado do elemento associamos uma numeração interna a ele, que são os nós 1 e 2. A partir da formulação de um elemento finito, ele estará disponível na "Biblioteca de Elementos" por intermédio de sua Matriz de Rigidez. Assim, qualquer que seja o elemento de treliça, e independentemente de onde for ser utilizado, a sua Matriz de Rigidez é dada por:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} \frac{A.E}{L} & -\frac{A.E}{L} \\ -\frac{A.E}{L} & \frac{A.E}{L} \end{bmatrix}$$

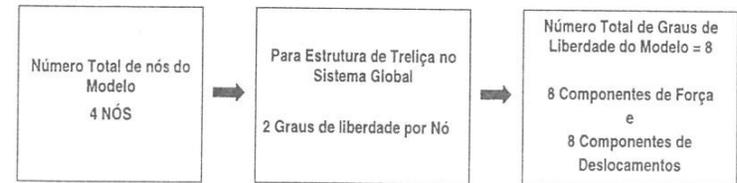
Ao representar a montagem de elementos no modelo, cada elemento deverá referir-se ao Sistema que vale para a estrutura como um todo, isto é, o **Sistema Global de Coordenadas**, para posteriormente montar-se a Matriz de Rigidez da Estrutura a partir das Matrizes de Rigidez de cada um de seus elementos. A expressão da Matriz de Rigidez de cada elemento no Sistema Global é dada por (3.9). É fundamental, ao definir os Vetores de Localização de cada elemento, **estabelecer os seus Nós 1 e 2, pois estes definirão a orientação do eixo local x do elemento**. Essa definição é arbitrária, porém escolhidos esses nós, esta orientação deverá permanecer inalterada, pois **definirá o ângulo α formado entre os eixos x local e X global**.

Outro aspecto fundamental refere-se aos vetores de localização. Estes devem, em um procedimento automatizado, referir-se à numeração em coordenadas da estrutura. Como cada nó tem mais que um grau de liberdade, **os graus de liberdade são identificados por intermédio de uma numeração**, seguindo uma orientação padronizada. Por exemplo, os Graus de Liberdade são numerados "dentro" de cada nó, seguindo uma seqüência inalterada. Assim, **numera-se o Grau de Liberdade X de um nó e depois o grau de liberdade Y, e assim sucessivamente em todos os nós**.

Vale observar que, na prática, os Programas de Análise por Elementos Finitos seguem internamente esse mesmo procedimento para "administrar" o sistema de equações, como veremos adiante. O usuário normalmente identifica um número de nó, mas "escondida" atrás dessa numeração está definida a **numeração interna dos graus de liberdade**. Neste exemplo, estamos fazendo o papel do "software" de análise, com o objetivo de entender os procedimentos do método, portanto adotaremos essa nomenclatura. Para que não haja confusão entre número de nó, e número de grau de liberdade, os nós foram identificados por intermédio de letras, apenas por motivo didático.

Assim, na figura 3.8, foram feitas as numerações dos graus de liberdade da estrutura, seguindo a orientação estabelecida, independentemente de qualquer condição de restrição.

Nessa mesma figura foi identificada para cada elemento a definição do **eixo local x**, por intermédio da escolha arbitrária dos nós 1 e 2. A partir dessa definição, cada elemento foi identificado em uma visão "explodida", de modo a definir em cada caso o valor do ângulo α . Assim, para a estrutura em estudo, temos:



Assim, as Matrizes que contêm as Forças Nodais de toda a Estrutura e os Deslocamentos Nodais serão:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix}$$

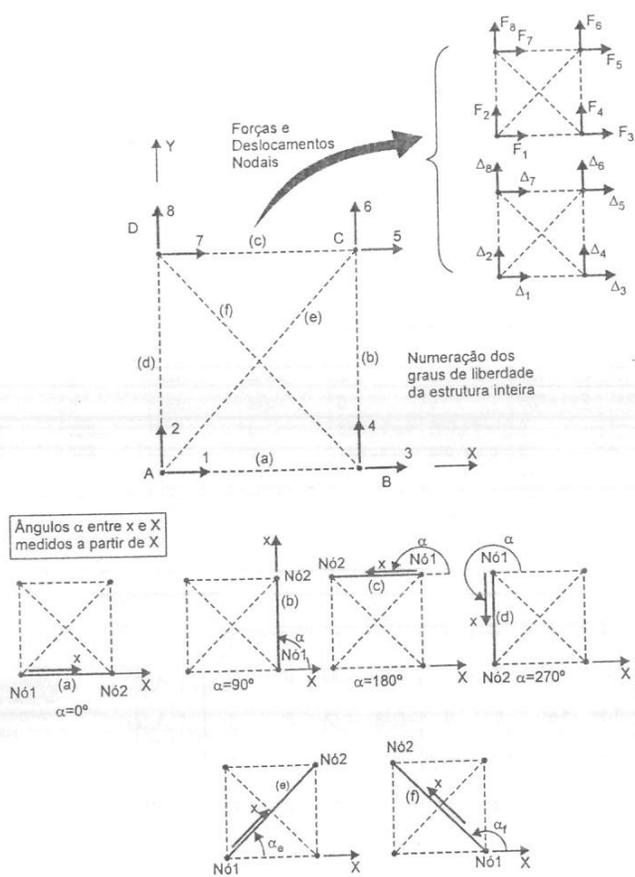


Figura 3.8 – Além de representar cada nó do Modelo da Estrutura, para cada nó da estrutura inteira é representada a numeração dos Graus de Liberdade.

A figura 3.9 representa cada elemento do modelo identificando os graus de liberdade associados aos nós 1 e 2 do elemento.

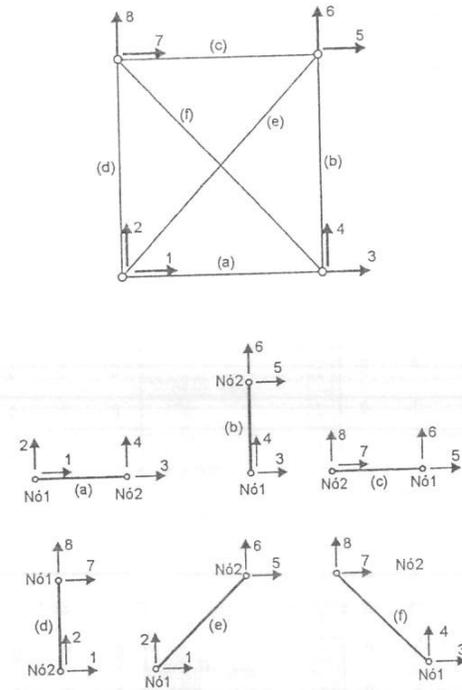
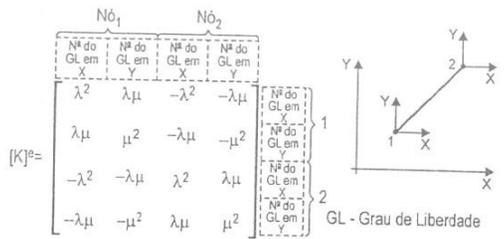


Figura 3.9 – Identificação de cada elemento do modelo e os correspondentes graus de liberdade, numerados ao longo da estrutura inteira.

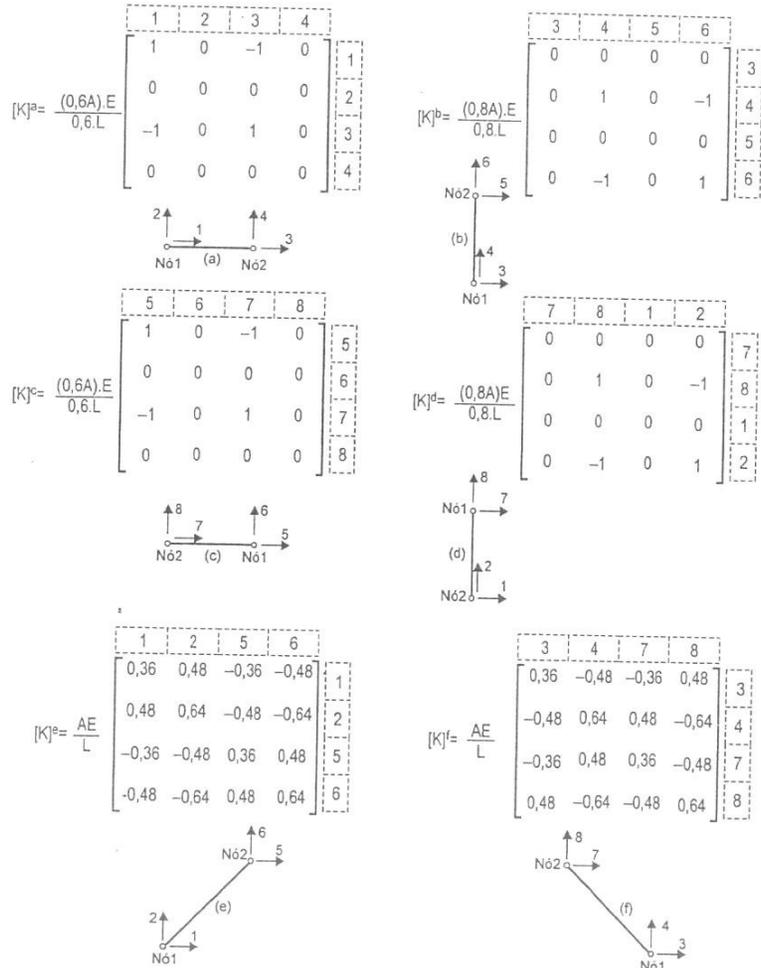
A partir da figura anterior, utilizando a expressão da Matriz de Rigidez de um Elemento de Barra Articulada, vamos montar a Matriz de Rigidez de cada um dos elementos da estrutura. Na tabela seguinte são identificados todos os valores necessários para efetuar essa montagem e, em seguida, a expressão geral da matriz de rigidez de um elemento de treliça no sistema Global.

Tabela 3.1 – Ângulos α para as diversas barras do modelo da estrutura.

ELEMENTO	α	λ	μ	λ^2	μ^2	$\lambda \cdot \mu$
a	0°	1	0	1	0	0
b	90°	0	1	0	1	0
c	180°	-1	0	1	0	0
d	270°	0	-1	0	1	0
e	α_e	0,6	0,8	0,36	0,64	0,48
f	α_f	-0,6	0,8	0,36	0,64	-0,48



Assim, substituindo os valores numéricos definidos na tabela anterior, teremos as Matrizes de Rigidez de todos elementos da estrutura objeto de análise, dadas em seguida.



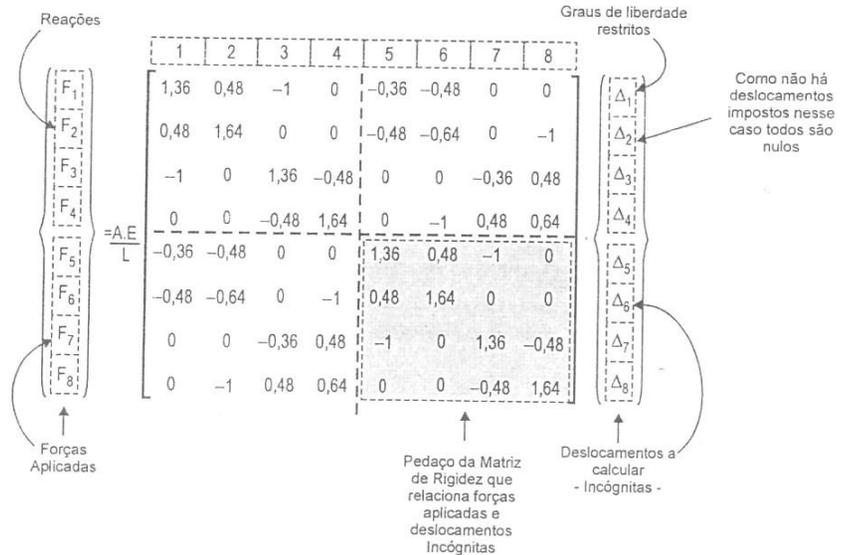
3.4.3. MONTE A MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA A PARTIR DAS MATRIZES DE RIGIDEZ DOS SEUS ELEMENTOS - SISTEMA DE EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Utilizando o Procedimento de Montagem definido anteriormente, podemos obter a Matriz de Rigidez da Estrutura a partir das Matrizes de Rigidez de cada um dos seus elementos.

Devemos identificar em cada Matriz de Rigidez de Elemento, a sua contribuição nessa montagem. Por exemplo, os coeficientes I,J (linha, coluna) da matriz de um elemento serão adicionados na mesma localização I,J da Matriz da estrutura. Assim, por intermédio desse procedimento, serão obtidas as **Equações de Equilíbrio da Estrutura**. É obtida a Matriz Coeficiente que relaciona as Forças Nodais e os Deslocamentos Nodais para toda a Estrutura. A estrutura analisada tem 8 graus de liberdade, portanto a sua Matriz de Rigidez terá dimensão 8 x 8. A Matriz de Rigidez da Estrutura contém todos os seus graus de liberdade identificados no vetor de localização. Inserindo os termos nas linhas e colunas correspondentes para montar [K], teremos:

$$[K] = \frac{AE}{L}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1+0+0,36	0+0+0,48	-1	0	-0,36	-0,48	0	0
2	0+0+0,48	0+1+0,64	0	0	-0,48	-0,64	0	-1
3	-1	0	1+0+0,36	0+0-0,48	0	0	-0,36	0,48
4	0	0	0+0-0,48	0+1+0,64	0	-1	0,48	-0,64
5	-0,36	-0,48	0	0	0+1+0,36	0+0+0,48	-1	0
6	-0,48	-0,64	0	-1	0+0+0,48	1+0+0,64	0	0
7	0	0	-0,36	0,48	-1	0	1+0+0,36	0+0-0,48
8	0	-1	0,48	-0,64	0	0	0+0-0,48	0+1+0,64



Esta última equação matricial representa as equações de Equilíbrio da Estrutura.

Se fizéssemos o produto matricial poderíamos representar as equações constituintes desse sistema. Na forma matricial essas equações poderiam ser resolvidas de forma compacta. A título de ilustração, representamos o sistema de equações:

$$\begin{aligned}
 \text{REAÇÕES} \quad & \begin{cases} F_1 = (1,36 \cdot \Delta_1 + 0,48 \cdot \Delta_2 - 1 \cdot \Delta_3 + 0 \cdot \Delta_4 - 0,36 \cdot \Delta_5 - 0,48 \cdot \Delta_6 + 0 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8) \cdot \frac{AE}{L} \\ F_2 = (0,48 \cdot \Delta_1 + 1,64 \cdot \Delta_2 + 0 \cdot \Delta_3 + 0 \cdot \Delta_4 - 0,48 \cdot \Delta_5 - 0,64 \cdot \Delta_6 + 0 \cdot \Delta_7 - 1 \cdot \Delta_8) \cdot \frac{AE}{L} \\ F_3 = (-1 \cdot \Delta_1 + 0 \cdot \Delta_2 - 1,36 \cdot \Delta_3 - 0,48 \cdot \Delta_4 + 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 0,36 \cdot \Delta_7 + 0,48 \cdot \Delta_8) \cdot \frac{AE}{L} \\ F_4 = (0 \cdot \Delta_1 + 0 \cdot \Delta_2 - 0,48 \cdot \Delta_3 + 1,64 \cdot \Delta_4 + 0 \cdot \Delta_5 - 1 \cdot \Delta_6 + 0,48 \cdot \Delta_7 - 0,64 \cdot \Delta_8) \cdot \frac{AE}{L} \end{cases} \\
 \text{FORÇAS APLICADAS} \quad & \begin{cases} F_5 = (-0,36 \cdot \Delta_1 - 0,48 \cdot \Delta_2 + 0 \cdot \Delta_3 + 0 \cdot \Delta_4 + 1,36 \cdot \Delta_5 + 0,48 \cdot \Delta_6 - 1 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8) \cdot \frac{AE}{L} \\ F_6 = (-0,48 \cdot \Delta_1 - 0,64 \cdot \Delta_2 + 0 \cdot \Delta_3 - 1 \cdot \Delta_4 + 0,48 \cdot \Delta_5 + 1,64 \cdot \Delta_6 + 0 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8) \cdot \frac{AE}{L} \\ F_7 = (0 \cdot \Delta_1 + 0 \cdot \Delta_2 - 0,36 \cdot \Delta_3 + 0,48 \cdot \Delta_4 - 1 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 1,36 \cdot \Delta_7 - 0,48 \cdot \Delta_8) \cdot \frac{AE}{L} \\ F_8 = (0 \cdot \Delta_1 - 1 \cdot \Delta_2 + 0,48 \cdot \Delta_3 - 0,64 \cdot \Delta_4 + 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 0,48 \cdot \Delta_7 + 1,64 \cdot \Delta_8) \cdot \frac{AE}{L} \end{cases}
 \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.4.4. DEFINA AS CONDIÇÕES DE CONTORNO DE DESLOCAMENTOS-AS RESTRIÇÕES PARA PREPARAR A SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

A Matriz de Rigidez da Estrutura completamente montada é *Simétrica e Singular*. Já sabemos da impossibilidade de resolver esse sistema devido ao movimento de corpo rígido, pois o sistema completo representa a estrutura sem qualquer vínculo. Para as **condições de Restrição**, isto é, a estrutura restrita em A e B, correspondente aos **graus de liberdade 1,2,3 e 4**, as Forças Externas "aplicadas" na estrutura são F_1, F_2 e F_3 e F_4 . Essas forças externas não são aplicadas, mas sim **Reações de Apoio** e são incógnitas do Problema. Dessa forma, como vimos anteriormente, podemos estabelecer a relação entre as forças nodais aplicadas e os correspondentes deslocamentos nodais. Assim, a relação entre as forças F_5, F_6, F_7 e F_8 , e os correspondentes deslocamentos $\Delta_5, \Delta_6, \Delta_7$ e Δ_8 é expressa pelos coeficientes representados nas **localizações 5,6,7 e 8 da matriz de Rigidez**. Portanto, uma parte da Matriz de Rigidez é invertida para obter os deslocamentos nodais.

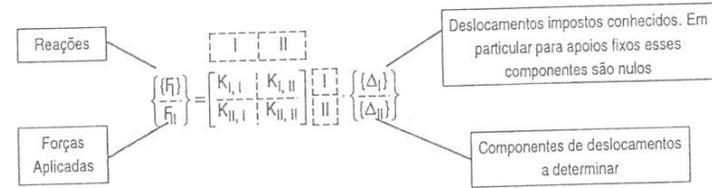
Assim com $F_5 = +2P = 1000 \text{ kgf}$; $F_6 = +P = 500 \text{ kgf}$ e $\frac{AE}{L} = \frac{300 \cdot 21000}{1000} = 6300$ temos:

$$\begin{Bmatrix} F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P \\ P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8568 & 3024 & -6300 & 0 \\ 3024 & 10332 & 0 & 0 \\ -6300 & 0 & 8568 & -3024 \\ 0 & 0 & -3024 & 10332 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Deve-se observar que este sistema de equações foi gerado a partir da condição de que os **componentes de deslocamento nos apoios fixos são nulos**. No caso geral, estes valores conhecidos poderiam ser não nulos, e a relação entre forças e deslocamentos incluiria estes termos. Deve-se notar também, que somente são aplicadas Forças associadas aos graus de liberdade 5 e 6. Porém, os componentes de força associados aos graus de liberdade 7 e 8 estão representados na Matriz coluna das cargas, e seus valores são iguais a zero. O **Quadro IV** aproveita a idéia deste exercício e introduz a Generalização válida para todos os casos de modelos em elementos finitos.

QUADRO IV – GENERALIZANDO O PROCEDIMENTO PARA O CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS PARA QUALQUER TIPO DE MODELO ESTRUTURAL

Para uma montagem de Elementos Finitos, podemos identificar no caso mais geral:



As "MACROS" Matrizes podem ser multiplicadas, resultando:

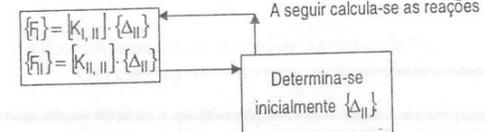
$$\{F_I\} = [K_{I,I}] \cdot \{\Delta_I\} + [K_{I,II}] \cdot \{\Delta_{II}\} \quad (1)$$

$$\{F_{II}\} = [K_{II,I}] \cdot \{\Delta_I\} + [K_{II,II}] \cdot \{\Delta_{II}\} \quad (2)$$

Resolve-se o Sistema ou Equação Matricial (2), pois $\{F_{II}\}$, $[K_{II,I}]$ e $[K_{II,II}]$ são conhecidas e determina-se $\{\Delta_{II}\}$

Retorna-se à equação (1) e com $\{\Delta_{II}\}$, determina-se $\{F_I\}$

Em particular, para apoios fixos tem-se $\{\Delta_I\} = \{0\} = \text{ZERO}$, então



3.4.5. DETERMINE OS DESLOCAMENTOS NODAIS PARA A ESTRUTURA INTEIRA, RESOLVENDO O SISTEMA DE EQUAÇÕES, E POSTERIORMENTE, AS REAÇÕES DE APOIO

A equação 3.11 permite efetuar o Cálculo dos Deslocamentos para a Estrutura inteira, por intermédio da Inversão de parte da Matriz de Rigidez da Estrutura, como já discutido no Exercício do Elemento de mola do capítulo anterior. Naquela oportunidade o Cálculo da Matriz Inversa foi efetuado por Procedimento Formal, adequado para Cálculo Manual de Matrizes de pequena ordem, tal como 2x2 ou 3x3. Para Matrizes de maior ordem, como aquelas encontradas em grandes sistemas de equações lineares simultâneas utilizadas nas Aplicações do Método dos Elementos Finitos, e que constituem importante tarefa das Análises Numéricas, outros procedimentos diferentes daquele acima apresentado são utilizados. Um dos métodos mais conhecidos de solução de sistemas de equações lineares, é o **Método de Gauss, da Eliminação**. O **Método Básico de Gauss reduz as equações à forma triangular**. Para introduzir essa idéia, utilizaremos o Método de Gauss nas operações manuais de resolução do Sistema deste exercício, com apenas pretensões didáticas (ver Quadro V). A implementação de rotinas para grandes sistemas de equações, e que fogem aos objetivos deste texto, deveriam ser aprofundadas pelo leitor que pretende se envolver com a implantação dessas rotinas em computador, como por exemplo, nos trabalhos de desenvolvimento de "softwares" de análise.

QUADRO V – REVISANDO O MÉTODO DE GAUSS

O **Método de Gauss** ou **Método das Eliminações Sucessivas**, é um processo para resolução de Sistemas Lineares, que por intermédio de Transformações Elementares, torna o Sistema dado em outro equivalente e de solução imediata. Tais operações são basicamente:

- i) **Permutar entre si duas equações do Sistema.** Isso permite, em termos práticos, agrupar as equações de forma organizada. Por exemplo, para as equações do Quadro IV, os termos correspondentes às Reações de Apoio (Fi), ficarão agrupadas na parte "superior" da Matriz de Carga, e assim sucessivamente para os outros elementos do sistema, sem alterar o Sistema.
- ii) **Multiplicar todos os termos de uma das equações do Sistema por um número diferente de zero**
- iii) **Multiplicar uma equação do Sistema por um número diferente de zero, e adicionar o resultado a outra equação do Sistema.**

Esses procedimentos têm o seguinte objetivo:

- **Eliminar a 1ª incógnita das equações, com exceção da primeira equação.** Isso pode ser feito tornando seu coeficiente igual a zero.
- **Eliminar a 2ª incógnita das equações, com exceção da segunda equação.** Isso pode ser feito tornando seu coeficiente igual a zero.
- **Eliminar a 3ª incógnita das equações, com exceção da terceira equação.** Isso pode ser feito tornando seu coeficiente igual a zero, e assim sucessivamente.

Por esse procedimento vai-se **reduzindo o número de incógnitas das equações seguintes sucessivamente**, até que na última equação teremos somente uma equação a uma incógnita- "**Forward Reduction**".

A partir desta última equação reduzida, determina-se a última incógnita, e voltando na equação anterior e substituindo-se essa última incógnita, determina-se a penúltima, e assim sucessivamente. "**Backsubstitution**".

Esse procedimento é aplicado ao exemplo do presente exercício como ilustração.

Aplicando esse procedimento ao sistema de equações deste exercício, teremos:

$$\begin{cases} 8568 \cdot \Delta_5 + 3024 \cdot \Delta_6 - 6300 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 1000 & (1) \\ 3024 \cdot \Delta_5 + 10332 \cdot \Delta_6 + 0 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 500 & (2) \\ -6300 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 8568 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 0 & (3) \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 0 & (4) \end{cases}$$

Passo 1: Subtrair um múltiplo da equação (1), das equações (2) e (3) para obter zeros na primeira coluna de [K]. Isto significa que

$\begin{pmatrix} -3024 \\ 8568 \end{pmatrix}$ a primeira linha é adicionada à Segunda linha, e que $\begin{pmatrix} 6300 \\ 8568 \end{pmatrix}$ vezes a primeira linha é adicionado à terceira linha.

$$\begin{cases} 8568 \cdot \Delta_5 + 3024 \cdot \Delta_6 - 6300 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 1000 & (1') \\ 0 \cdot \Delta_5 + 9264,7 \cdot \Delta_6 + 2223,5 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 147,1 & (2') \\ 0 \cdot \Delta_5 + 2223,5 \cdot \Delta_6 + 3935,6 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 735,3 & (3') \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 0 & (4') \end{cases}$$

Passo 2: $\begin{pmatrix} -2223,5 \\ 9264,7 \end{pmatrix}$ vezes a equação (2') é adicionado à equação (3').

$$\begin{cases} 8568 \cdot \Delta_5 + 3024 \cdot \Delta_6 - 6300 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 1000 & (1'') \\ 0 \cdot \Delta_5 + 9264,7 \cdot \Delta_6 + 2223,5 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 147,1 & (2'') \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 3402 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 700 & (3'') \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 - 3024 \cdot \Delta_7 + 10332 \cdot \Delta_8 = 0 & (4'') \end{cases}$$

Passo 3: $\begin{pmatrix} 3024 \\ 3402 \end{pmatrix}$ vezes a equação (3'') é adicionado à equação (4'').

$$\begin{cases} 8568 \cdot \Delta_5 + 3024 \cdot \Delta_6 - 6300 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 1000 & (1''') \\ 0 \cdot \Delta_5 + 9264,7 \cdot \Delta_6 + 2223,5 \cdot \Delta_7 + 0 \cdot \Delta_8 = 147,1 & (2''') \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 3402 \cdot \Delta_7 - 3024 \cdot \Delta_8 = 700 & (3''') \\ 0 \cdot \Delta_5 + 0 \cdot \Delta_6 + 0 \cdot \Delta_7 + 7644 \cdot \Delta_8 = 622,2 & (4''') \end{cases}$$

↓

Começar resolvendo (4''') → em seguida substituir nas equações anteriores. Assim:

$$(4''') \Delta_8 = \frac{622,2}{7644} \rightarrow \Delta_8 \approx 0,08140 \text{ mm}$$

$$(3''') 3402 \cdot \Delta_7 - 3024 \times 0,08140 = 700 \rightarrow \Delta_7 \approx 0,27812 \text{ mm}$$

$$(2''') 9264,7 \cdot \Delta_6 + 2223,5 \cdot 0,27812 = 147,1 \rightarrow \Delta_6 \approx -0,05087 \text{ mm}$$

$$(1''') 8568 \cdot \Delta_5 + 3024 \cdot (-0,05087) - 6300 \cdot (0,27812) = 1000 \rightarrow \Delta_5 \approx 0,33917 \text{ mm}$$

Dessa forma, estão determinados os componentes de deslocamentos para toda a estrutura.

As equações (3.10) permitirão o Cálculo das Reações de Apoio na Estrutura.

Assim com $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$, e substituindo os valores dos deslocamentos anteriormente calculados, teremos os valores das Forças de Reação, com os respectivos sinais, que devem ser interpretados de acordo com a Convenção de sinais, referida aos eixos globais.

$F_1 = -615,41 \text{ Kgf}$ – Em sentido contrário ao eixo X.

$F_2 = -1333,36 \text{ Kgf}$ – Em sentido contrário ao eixo Y.

$F_3 = -384,62 \text{ Kgf}$ – Em sentido contrário ao eixo X.

$F_4 = 833,31 \text{ Kgf}$ – No mesmo sentido do eixo Y.

Note que as Forças Externas aplicadas na estrutura e as reações de apoio estão em equilíbrio, como é representado na figura 3.10.

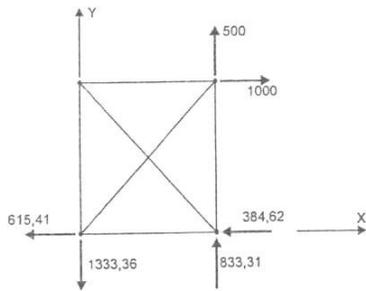


Figura 3.10 – Forças Aplicadas e Reações de Apoio para Estrutura em Equilíbrio.

3.4.6. DETERMINE AS FORÇAS INTERNAS EM CADA ELEMENTO A PARTIR DO CONHECIMENTO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS ASSOCIADOS AO ELEMENTO

Após obter o Campo de Deslocamentos para a Estrutura inteira, podemos identificar para cada elemento isolado, quais são os componentes de deslocamentos nodais associados ao elemento, isto é, em cada um dos graus de liberdade. Dessa forma poderá ser definida a configuração deformada do mesmo. Esse procedimento é efetuado elemento por elemento, pois conhecemos a Lei que exprime a Força Interna em mesmo em função dos deslocamentos nodais. Essa idéia, como vimos no exemplo da mola, é geral para todas as montagens de elementos finitos. A deformação obtida nos diversos elementos de uma estrutura, decorre do campo de deslocamentos a que esta está submetida. No caso da barra de treliça, à semelhança da Mola, a condição de deformação é obtida pela diferença dos deslocamentos dos Nós que definem o elemento. Deve-se notar que a Lei de Deformação Interna do Elemento foi formulada no Sistema Local de Coordenadas, e no Quadro III vimos que Força Interna = $\frac{EA}{L} \cdot d$, onde d representa a diferença dos deslocamentos u_1 e u_2 .

A expressão da Deformação é sempre definida no Sistema Local, até porque quando o elemento finito é formulado, não se conhece antecipadamente qual será a sua posição em uma montagem qualquer. Como a Estrutura completa foi resolvida no Sistema Global, devemos transformar esses valores calculados exprimindo-os agora no Sistema Local. Assim:

$$\mathcal{F}_e = \frac{AE}{L} \cdot (u_2 - u_1) = \text{Força Interna em Elemento de barra qualquer- Sistema Local}$$

A figura 3.11 representa para um Elemento qualquer de barra, os componentes de deslocamentos nos Sistema Local e Global. Utilizando a identificação dos nós 1 e 2 do elemento, podemos representar os componentes de deslocamento no sistema global. Representaremos genericamente por U e V os deslocamentos em X e Y , e depois faremos a correspondência com a numeração dos graus de liberdade da estrutura inteira. Da equação (3.7), temos:

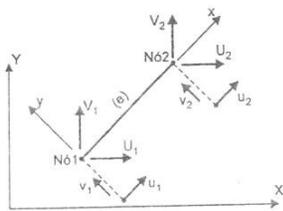


Figura 3.11 – Para cálculo da força Interna na Barra, os deslocamentos U_1, V_1, U_2, V_2 globais devem ser transformados para o sistema local, para calcular $\mathcal{F}_e = \frac{AE}{L} \cdot (u_2 - u_1)$.

$$\{\delta\} = [T] \cdot \{\Delta\} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} \rightarrow$$

Queremos calcular u_1 e u_2 , portanto:

$$u_1 = \lambda \cdot U_1 + \mu \cdot V_1$$

$$u_2 = \lambda \cdot U_2 + \mu \cdot V_2$$

Fazendo $u_2 - u_1 = \lambda \cdot U_2 + \mu \cdot V_2 - \lambda \cdot U_1 - \mu \cdot V_1 = \lambda(U_2 - U_1) + \mu \cdot (V_2 - V_1)$ representado na forma matricial:

$$\{u_2 - u_1\} = [\lambda \ \mu]_e \cdot \begin{Bmatrix} U_2 - U_1 \\ V_2 - V_1 \end{Bmatrix}$$

Assim:

$$\mathcal{F}_e = \left(\frac{AE}{L} \right)_e [\lambda \ \mu]_e \cdot \begin{Bmatrix} U_2 - U_1 \\ V_2 - V_1 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

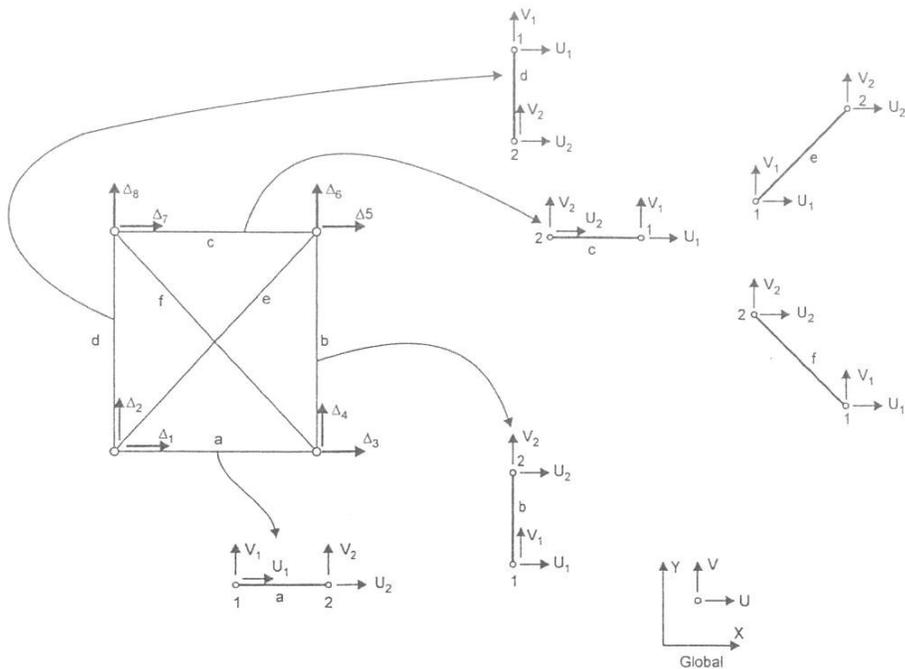
Como a expressão é calculada elemento por elemento, para cada elemento e , temos a sua área de seção e o material correspondente. Assim cada elemento pode ter geometria e material diferentes do outro.

Definimos a sua posição de cada elemento na montagem por intermédio do seno e cosseno do ângulo α e identificamos os Deslocamentos Globais associados a ele.

Assim, com a expressão 3.12 podemos calcular as Forças Internas em todos os elementos do Modelo da Estrutura. Como essa expressão relaciona os deslocamentos globais aos nós 1 e 2, deve-se apenas identificar na numeração geral dos graus de liberdade da estrutura quais são esses componentes. A figura 3.12 identifica essa correspondência e organiza essa relação em forma de tabela.

Na montagem da matriz de rigidez da Estrutura, foram consideradas inicialmente as Matrizes de Rigidez de cada Elemento. Para cada elemento, foram contabilizadas as características geométricas e as propriedades do material associado ao elemento. Desta forma, em princípio cada elemento poderia ser constituído de um material diferente.

Esta é uma característica geral dos modelos em elementos finitos. Após a resolução do sistema de equações para a estrutura inteira, o cálculo das forças internas em cada elemento considera as características de cada elemento separadamente em termos de propriedades geométricas e de material.



Elemento	Deslocamentos		Globais	
	U ₁	V ₁	U ₂	V ₂
(a)	Δ ₁	Δ ₂	Δ ₃	Δ ₄
(b)	Δ ₃	Δ ₄	Δ ₅	Δ ₆
(c)	Δ ₅	Δ ₆	Δ ₇	Δ ₈
(d)	Δ ₇	Δ ₈	Δ ₁	Δ ₂
(e)	Δ ₁	Δ ₂	Δ ₅	Δ ₆
(f)	Δ ₃	Δ ₄	Δ ₇	Δ ₈

Figura 3.12 – Correspondência entre os Deslocamentos Globais U, V e Δ.

Por exemplo, para a barra (b) teríamos:

$$\mathcal{F}_b = \left(\frac{AE}{L} \right)_b [\lambda \ \mu]_b \begin{Bmatrix} U_2 - U_1 \\ V_2 - V_1 \end{Bmatrix} = \left(\frac{0,8 \cdot A \cdot E}{0,8 \cdot L} \right) \cdot [0 \ 1] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_5 - \Delta_3 \\ \Delta_6 - \Delta_4 \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_b = 6300 \cdot [0 \ 1] \cdot \begin{Bmatrix} 0,33917 - 0 \\ -0,05087 - 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_b = -320,5 \text{ kgf}$$

O sinal negativo da Força Interna indica que esta é de Compressão na barra.

Utilizando o Quadro III poderíamos calcular: $\sigma = \frac{\mathcal{F}_b}{A} = \frac{-320,5 \text{ kgf}}{0,8 \cdot 300} = -1,34 \text{ kgf/mm}^2$ Tensão Normal de Compressão na Barra.

Utilizando a correspondência estabelecida entre U, V e Δ para os diversos graus de liberdade podemos calcular as Forças Internas para os demais elementos de forma análoga:

$$\mathcal{F}_a = 6.300 \cdot [1 \ 0] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_3 - \Delta_1 \\ \Delta_4 - \Delta_2 \end{Bmatrix} = 6300 \cdot [1 \ 0] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathcal{F}_a = 0$$

$$\mathcal{F}_c = 6.300 \cdot [-1 \ 0] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_7 - \Delta_5 \\ \Delta_8 - \Delta_6 \end{Bmatrix} = 6300 \cdot [-1 \ 0] \cdot \begin{Bmatrix} 0,27812 - 0,33917 \\ 0,08140 - (-0,05087) \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathcal{F}_c = +384,62 \text{ kgf} \quad (\text{Tração})$$

$$\mathcal{F}_d = 6.300 \cdot [0 \ -1] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_1 - \Delta_7 \\ \Delta_2 - \Delta_8 \end{Bmatrix} = 6300 \cdot [0 \ -1] \cdot \begin{Bmatrix} 0 - 0,27812 \\ 0 - 0,08140 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathcal{F}_d = +512,82 \text{ kgf} \quad (\text{Tração})$$

$$\mathcal{F}_e = 6.300 \cdot [0,6 \ 0,8] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_5 - \Delta_1 \\ \Delta_6 - \Delta_2 \end{Bmatrix} = 6300 \cdot [0,6 \ 0,8] \cdot \begin{Bmatrix} 0,33917 - 0 \\ -0,05087 - 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathcal{F}_e = +1025,68 \text{ kgf} \quad (\text{Tração})$$

$$\mathcal{F}_f = 6.300 \cdot [-0,6 \ 0,8] \cdot \begin{Bmatrix} \Delta_7 - \Delta_3 \\ \Delta_8 - \Delta_4 \end{Bmatrix} = 6300 \cdot [-0,6 \ 0,8] \cdot \begin{Bmatrix} 0,27812 - 0 \\ 0,08140 - 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathcal{F}_f = -641,04 \text{ kgf} \quad (\text{Compressão})$$

3.5. ASPECTOS GERAIS IMPORTANTES NA FORMULAÇÃO DE QUALQUER ELEMENTO FINITO

O Elemento de Treliça foi utilizado como "plano de fundo" para se introduzir o conceito de transformação entre sistemas de coordenadas. Ao representarmos o equilíbrio de um elemento finito por intermédio do seu diagrama de corpo livre, as forças que justificam o equilíbrio do elemento podem estar referidas tanto ao sistema local como ao sistema global de coordenadas. O interesse de uma ou outra representação já foi discutido anteriormente. É importante, porém, observar que as transformações da representação do equilíbrio de forças de um sistema para outro é possível por intermédio da Matriz de Transformação. Esse conceito geral é válido para todos os elementos finitos. A particularidade associada a cada tipo de elemento, está no número de componentes de força que justificam o equilíbrio do elemento, e natureza dessas forças. Alguns elementos transferem apenas forças nodais, por exemplo o Elemento de Treliça, outros, como por exemplo o Elemento de Viga que estudaremos a seguir, transferem forças e momentos. Mas sempre será possível representar esses componentes em um sistema ou outro. Assim, todo elemento finito terá a sua matriz de transformação, e de forma análoga à treliça, a sua dimensão está associada ao número de componentes de força considerados no elemento. Da mesma forma, o elemento admitirá a representação da sua rigidez, por intermédio da sua Matriz de Rigidez, tanto no sistema local como no sistema global. A equação (3.8) que representa a transformação da Matriz de Rigidez de um Elemento do Sistema Local para o Sistema Global é de aplicação geral para todos os elementos finitos, desde que para cada Matriz de Rigidez do Elemento considerada no Sistema Local $[k]^e$, seja utilizada a Matriz de Transformação associada ao Elemento. A figura 3.13 ilustra essa idéia geral. Os exemplos representados do elemento de viga no espaço, elemento sólido na forma de um paralelepípedo e o elemento de casca serão estudados e formulados adiante, e foram colocados aqui apenas no sentido de enfatizar a idéia da Transformação da Matriz de Rigidez do Sistema Local para o Sistema Global no caráter mais amplo possível.