MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Henry Figueredo Losada

Universidad de la República-Uruguay
IIMPI-FING

henryf@fing.edu.uy

17 de agosto de 2020

Sumario

CLASE 4. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO BARRA.

TEMA II. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 1D-ESTÁTICOS.

TEMA II. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 1D-ESTÁTICOS.

CLASE 4. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS TIPO BARRA.

1. Introducción.
2. Definición de los elementos Finitos tipo Barra.
3. Derivación de la Matriz de Rigidez para un Elemento Tipo Barra.
4. Transformación de la matriz de rigidez del elemento en el sistema local para el sistema global.
5. Cálculo de las tensiones para una barra en el plano x-y).

Clase No.4

1. Introducción.

En esta aula inicia el estudio del segundo elemento finito que hará parte de la biblioteca de elementos que estamos construyendo en este curso, o sea el Elemento de Barra (Truss) o Barra articulada en las extremidades. En la mecánica estructural una barra es un componente estructural caracterizado por dos propiedades:

1. La dimensión longitudinal o axial es mayor que las otras dimensiones, las cuales son conocidas como dimensiones transversales. La intercepción de un plano normal a la longitud dimensional con la barra define la sección transversal. La dimensión longitudinal define el eje longitudinal.
2. La barra resiste una fuerza interna axial a lo largo de su dimensión longitudinal.

2. Definición de los elementos Finitos tipo Barra

Muchos de los problemas de la mecánica pueden ser tratados con elementos de barra o de armazón y tratados como problemas lineal elásticos, para esta condición se asume que:

1. Pequeñas deformaciones (el patrón de carga no cambia debido a la forma deformada)
2. El material es elástico (ninguna plasticidad o falla tiene lugar).
3. Las cargas son estáticas (la carga se aplica a la estructura en una forma lenta o estable).

El análisis lineal puede proporcionar la mayoría de la información sobre el comportamiento de una estructura, y puede ser una buena aproximación para muchos análisis.

2. Continuación

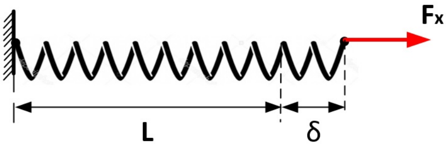
En el aula anterior fueron establecidos los fundamentos en los cuales se basa el método de rigidez directo, podemos derivar la matriz de rigidez para un elemento lineal elástico de barra usando los pasos generales esbozados en la clase 3.

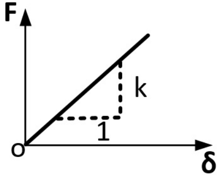
Como fue visto anteriormente necesitamos transformar del sistema local para el elemento al sistema global de la estructura.

En este sentido abordaremos la transformación de un vector del sistema local de coordenadas al sistema global usando el concepto de transformación matricial para expresar la matriz de rigidez de un elemento arbitrariamente orientado en términos de sistema global de coordenadas.

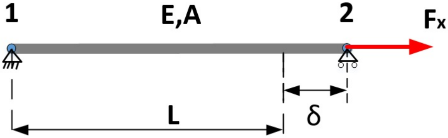
Clase No.4

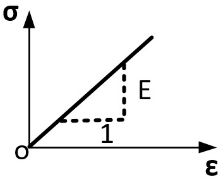
4. Derivación de la matriz de rigidez de un elemento de barra en coordenadas locales.





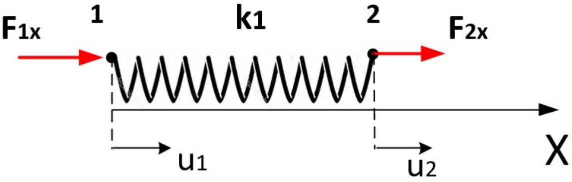
$$F = k \cdot \delta \tag{1}$$



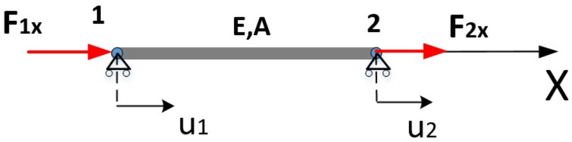


$$F = \frac{EA}{L} \cdot \delta \tag{2}$$

3. Continuación



$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{pmatrix} = k1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$



$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

3. Continuación

Ecuación de equilibrio para una Barra (truss)

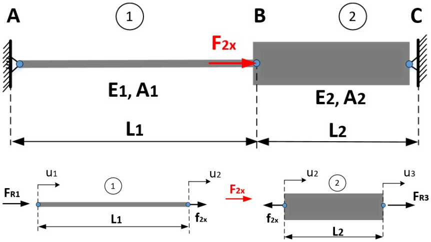
$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

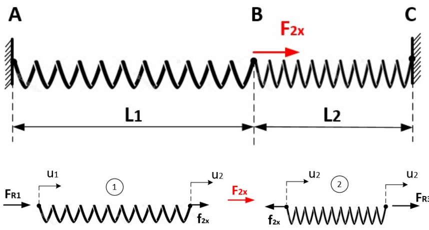
O simplemente como:

$$\{F_e\} = [K_e]\{u_e\} \tag{6}$$

Donde
$\{u_e\}$=[u_1 u_2]^t:vector de los desplazamientos nodales;
$\{F_e\}$=[F_1 F_2]^t:vector de las fuerzas nodales;
$[K_e]$: matriz de rigidez de la barra en el sistema de coordenadas locales.

3. Continuación





Ec Global de Equilibrio (Barra)

$$\therefore\ u_2 = \frac{F_2}{\frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2}}$$

$$F_{R1} = -\frac{E_1 A_1}{L_1} \cdot u_2$$

$$F_{R3} = -\frac{E_2 A_2}{L_2} \cdot u_2$$

Ec Global de Equilibrio (Resorte)

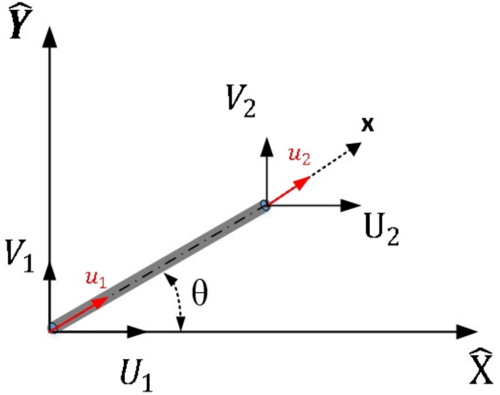
$$\therefore\ u_2 = \frac{F_2}{(k_1 + k_2)}$$

$$F_{R1} = -k1 \cdot u_2 = -\frac{k1 \cdot F_2}{k1 + k2}$$

$$F_{R3} = -k2 \cdot u_2 = -\frac{k2 \cdot F_2}{k1 + k2}$$

4. Transformación de la matriz de rigidez del SL para el SG.

En aulas anteriores fue introducido dos sistemas de coordenadas , el sistema local **(SL)** mediante el cual se oriente el elemento aislado y el sistema de coordenadas globales **(SG)** mediante el cual se orienta la estructura a la que pertenece el elemento.



$\{u_e\}$=$[\mathrm{u}_1\ u_2]^t$

$\{\hat{u}_e\}$=$[\mathrm{U}_1\ V_1\ U_2\ V_2]^t$

$$\begin{cases} u_1 = U_1 \cos(\theta) + V_1 \sin(\theta) \\ u_2 = U_2 \cos(\theta) + V_2 \sin(\theta) \end{cases}$$

4. Continuación

Agrupando en forma matricial y compacta

$$\{u_e\} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos(\theta) & sen(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{\hat{u}_e}$$

Sustituyendo en la Ec.(6):

$$\{F_e\} = [K_e]\,\mathbf{C} \cdot \mathbf{\hat{u}_e} \tag{7}$$

$$\mathbf{C^T}\,\{F_e\} = \mathbf{C^T}\,[K_e]\,\mathbf{C} \cdot \mathbf{\hat{u}_e} \tag{8}$$

$$\therefore\ \mathbf{C^T}\,[K_e]\,\mathbf{C} = \left[\mathbf{\hat{K}_e}\right]$$

$$\therefore\ \left\{\mathbf{\hat{F}_e}\right\} = \mathbf{C^T}\,\{F_e\} \tag{9}$$

4. Continuación

Ensamblaje dentro de un sistema Global.

Ecuación de equilibrio para una Barra SG)

$$\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{e}} \tag{10}$$

Donde

$\{\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{e}}\}$:vector de los desplazamientos nodales en **SG**;

$\left\{\hat{\mathbf{F}}_{\mathbf{e}}\right\}$:vector de las fuerzas nodales en **SG**;

$[\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}}]$: matriz de rigidez de la barra en el sistema de coordenadas global.

✓

4. Continuación

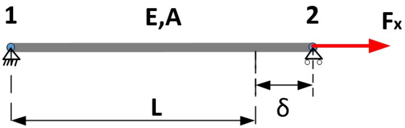
$$[\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}}] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} c(\theta)^2 & s(\theta)c(\theta) & -\cos(\theta)^2 & -s(\theta)c(\theta) \\ s(\theta)c(\theta) & s(\theta)^2 & -s(\theta)c(\theta) & -s(\theta)^2 \\ -c(\theta)^2 & -s(\theta)c(\theta) & c(\theta)^2 & s(\theta)c(\theta) \\ -s(\theta)c(\theta) & -s(\theta)^2 & s(\theta)c(\theta) & s(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

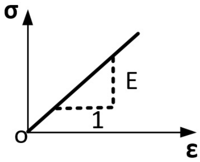
Clase No.4

5. Cálculo de las tensiones para una barra en el plano x-y

Consideremos las tensiones en un elemento de barra (truss). Para una barra las fuerzas son relacionadas con los desplazamientos locales mediante Ec.(5):

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$





$$\sigma = \frac{F_{2x}}{A} \;\therefore\; F_{2x} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \;\therefore\; \sigma = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$