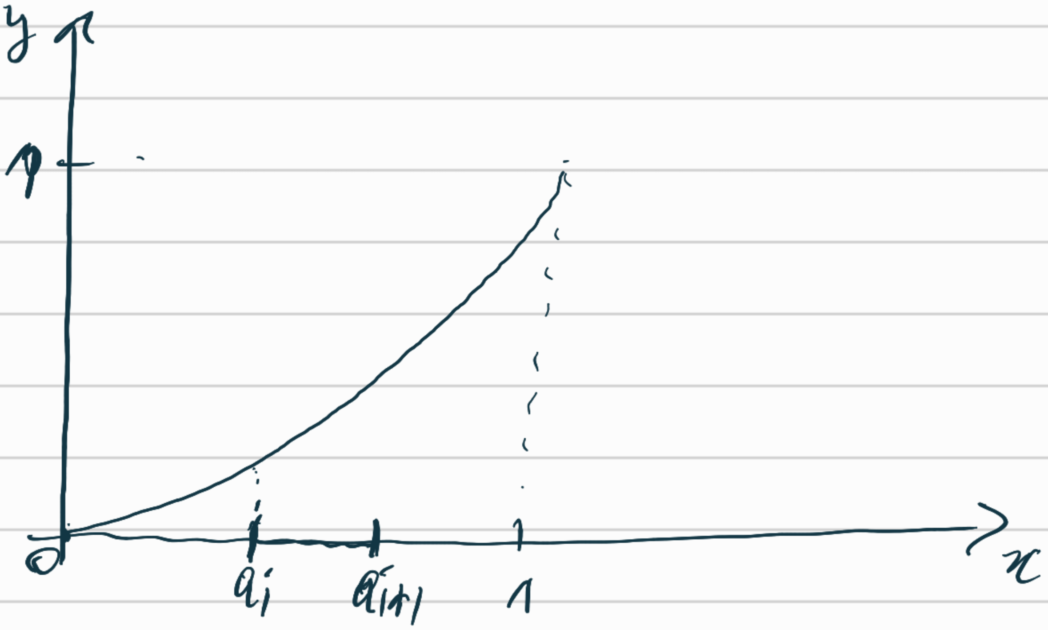
Clase 11 _ Integración (Parte 5)

Ejercicio: Sea $f:[0,1] \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2$

i) Probar que es integrable ✓

ii) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$



$P_n = \{ \underset{}{a_0 = 0}, \underset{a_1}{1/n}, \underset{a_2}{2/n}, \ldots, a_n = 1 \}$; $a_i = i/n$

$$S_*(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f(a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}$$

$$S^*(f, P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot f(a_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{i+1}{n}\right)^2$$

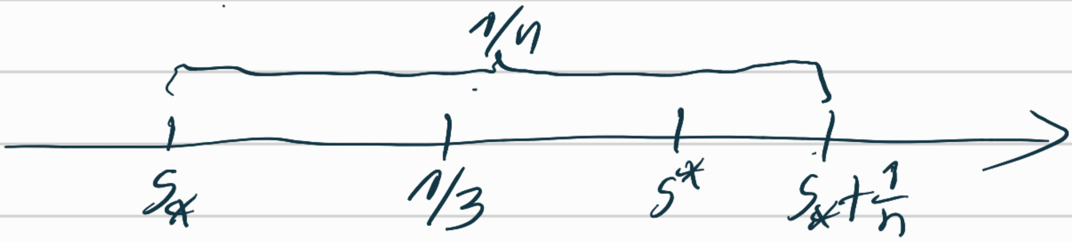
$$= 1/n^3 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$$

Probar por inducción que:

i) $1^2+2^2+\dots+(n-1)^2 < \dfrac{n^3}{3}$

ii) $1^2+2^2+\dots+n^2 > \dfrac{n^3}{3}$ ✓

$$\Rightarrow \quad S_*(f,P_n) < \frac{1}{3} < S^*(f,P_n) = S_*(f,P_n) + \frac{1}{n}$$



Dado $\varepsilon > 0$, consideramos $n \in \mathbb{Z}^+ \,/\, 1/n < \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad 1/3 - \varepsilon < S_*(f,P_n) < S^*(f,P_n) < 1/3 + \varepsilon$$

Por el criterio de integración: $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. □

<u>Ejercicio</u>: Si $a<b \Rightarrow \displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

<u>Notación</u>: $F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a)$

<u>Obs</u>: $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=a}^{x=b}$

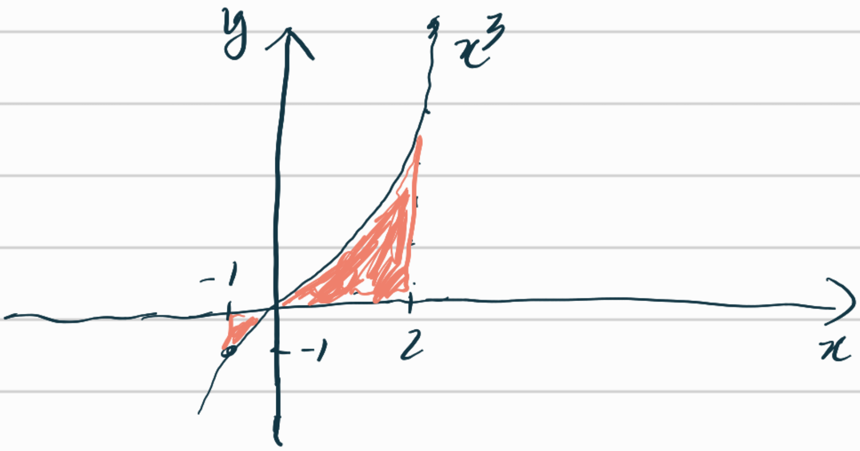
En general, se prueba que:

$$\int_a^b x^m\,dx = \left.\frac{x^{m+1}}{m+1}\right|_{x=a}^{x=b}$$

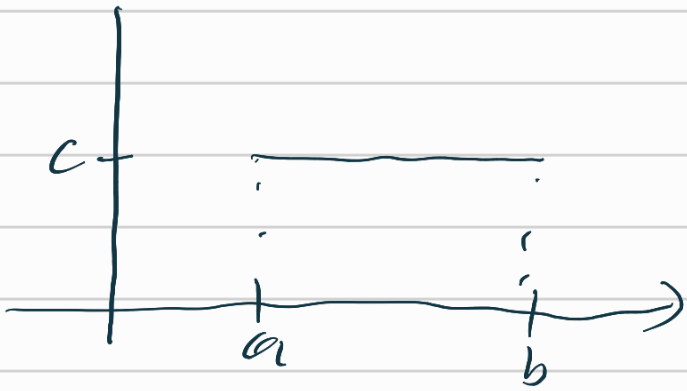
(Ver notas)

Ejemplo: $$\int_{-1}^{2} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{x=-1}^{x=2} = \frac{2^4}{4} - \left(\frac{(-1)^4}{4}\right)$$

$$= 4 - 1/4 = 15/4$$



Ejemplo: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ / $f(x) = c$ cte.



$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

Vamos a probarlo formalmente:

$P = \{a_0 = a, a_1, a_2, \ldots, a_n = b\}$

$$\Rightarrow S_*(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \underbrace{\inf(f, [a_i, a_{i+1}])}_{= c}$$

$$= c \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)$$

$$= c \cdot (b - a) \quad \forall \text{ partición } P$$

$$\Rightarrow I_*(f) = c \cdot (b - a).$$

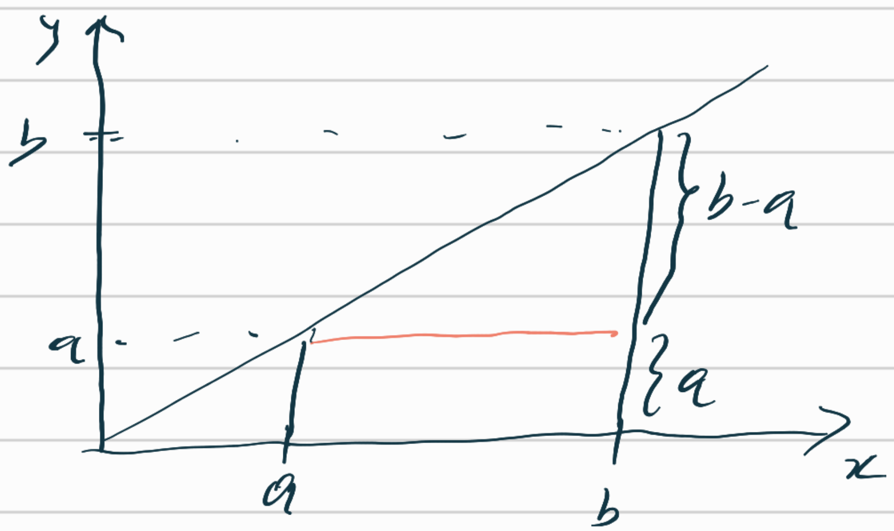
De igual manera $S^*(f, P) = c(b-a)$ $\forall$ partición P

$$\Rightarrow I^*(f) = c(b - a)$$

$\therefore$ f integrable y $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$

si $f(x) = c$ $\forall x \in [a, b]$.

Ejercicio: $f : [a, b] \to \mathbb{R} \, / \, f(x) = x$



$$\Rightarrow \int_a^b x\,dx = (b-a)a + \frac{(b-a)(b-a)}{2}$$

$$= ab - a^2 + \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2}$$

$$= \frac{2ab - 2a^2 + b^2 - 2ab + a^2}{2}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=a}^{x=b}$$

Probar esta fórmula formalmente:

Sugerencia: Considerar particiones equiespaciadas

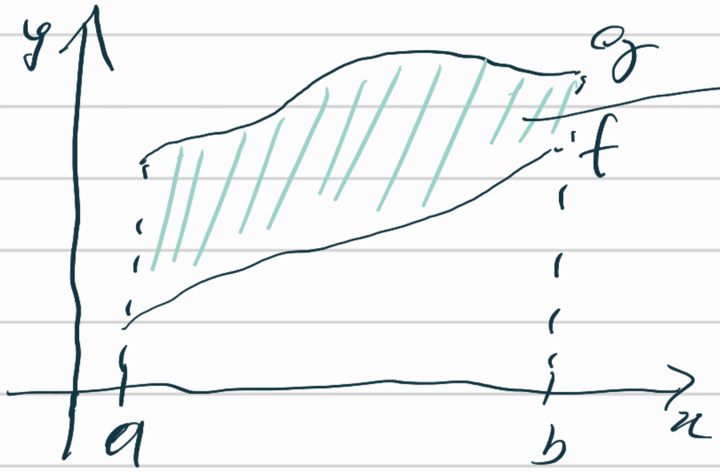
- $P_n = \{a_0 = a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd = b\}$
  con $d = \frac{b-a}{n}$
- $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$

—— // ——

Propiedades de la integral

① Monotonía: Si f, g son integrables en $[a,b]$
y $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$



$\int_a^b g - \int_a^b f$ se interpreta como el área encerrada entre los gráficos de f y g

Dem. Si P es una partición de $[a,b]$

$$S_*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i) \cdot \inf(f,[a_i,a_{i+1}])$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i) \cdot \inf(g,[a_i,a_{i+1}])$$
$$= S_*(g,P)$$

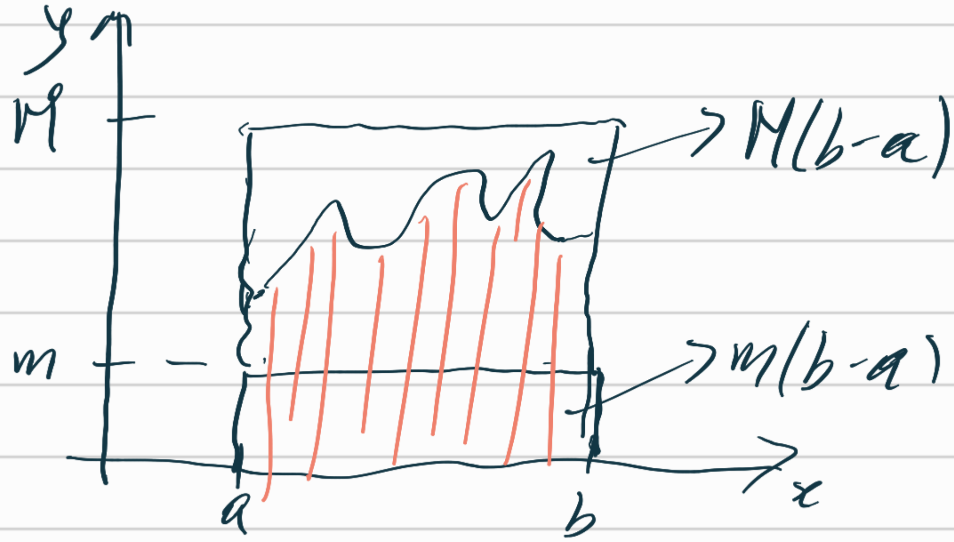
Tomando supremos: $I_*(f) \leq I_*(g)$

Como f y g son integrables: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Corolario: Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$



② **Linealidad**: Si f, g son integrables en $[a,b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cualesquiera.
Entonces la función $\alpha f(x) + \beta g(x)$ también es integrable en $[a,b]$ y vale

$$\longrightarrow \int_a^b (\underbrace{\alpha f(x) + \beta g(x)}_{\text{combinación lineal de } f \text{ y } g})\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Ejemplo: $f(x) = 2x^3 + 4x \rightarrow f(x)$ es combinación lineal de las funciones $g(x) = x^3$ y $h(x) = x$.

Casos especiales:

① $(\beta = 0)$: $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

② $(\alpha = \beta = 1)$: $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

③ $(\alpha = 1, \beta = -1)$: $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Ejemplo: Calcular $\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$

$$\int_0^4 (4 . x + (-1) . x^2)\,dx = 4\int_0^4 x\,dx + (-1)\int_0^4 x^2\,dx$$

$$= 4 . \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=4} + (-1) . \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=4}$$

$$= 4 . \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + (-1) . \left(\frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$= 4 . 8 + (-1) . \frac{64}{3} = 32 - 21 - \frac{1}{3} = 11 - \frac{1}{3}$$

$$= 32/3 .$$

Ejemplo: $\int_0^2 (2x^2 + 7)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx + \int_0^2 7\,dx$

$$= 2 . \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=2} + 7 . (2-0)$$

$$= 2\left(\frac{8}{3} - 0\right) + 14 = \frac{16}{3} + 14$$

Obs: La propiedad se extiende para combinación lineal de varias funciones:

$$\int(\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3) = \alpha_1\int f_1+\alpha_2\int f_2+\alpha_3\int f_3$$

Ejemplo: $\displaystyle\int_0^1 (2x^2+3x+1)\,dx = 2\int_0^1 x^2 + 3\int_0^1 x + \int_0^1 1$

$$= 2\cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} + 3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} + 1$$

$$= 2\cdot 1/3 + 3\cdot 1/2 + 1$$

Próxima clase: (20 min)

- Valor absoluto de $\int$
- Aditividad respecto a un intervalo
- Función logaritmo

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$$

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$