Clase 10:

Teorema de Bolzano-Weierstrass

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Subsucesiones

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y

n_k una sucesión de números

naturales estrictamente creciente.

$n_k = 2k$
$n_k = 2k+1$

$n_k =$ k-ésimo número primo

$n_k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$n_k \quad n_k : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{estrictamente creciente}} \mathbb{N}$

La composición de estas dos funciones forman una nueva sucesión de números reales

$$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \xrightarrow[n_k]{\text{estrictamente creciente}} \mathbb{N} \xrightarrow[a]{} \mathbb{R}$$

$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

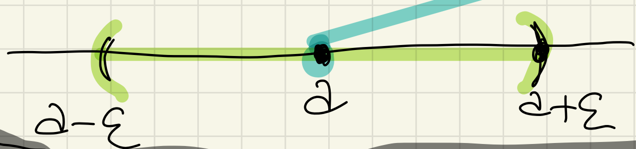
Def: punto de acumulación

$\boxed{A \subseteq \mathbb{R}}$ $\quad a \in \mathbb{R}$ es un **punto de acumulación** de A sii

$$\forall \varepsilon > 0 \quad E^*(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

entorno reducido
de centro a
y radio ε

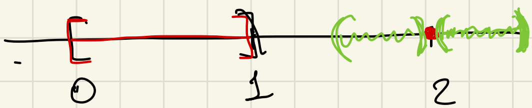
$$E^*(a, \varepsilon) = E(a, \varepsilon) - \{a\}$$



Notación $\quad A' =$ Conjunto de puntos de acumulación de A

Ejemplo:

1) $A = [0,1] \cup \{2\}$ $\quad$ Los puntos de acumulación de A es $[0,1]$



$E^*(2, 1/2)$

- 2 no es punto de acumulación ya que tomando $\varepsilon = 1/2$ $\quad E^*(2, 1/2) \cap A = \emptyset$

- Si $a \in [0,1]$ y $\varepsilon > 0$

$E^*(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

2) $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ Los puntos de acumulación de A

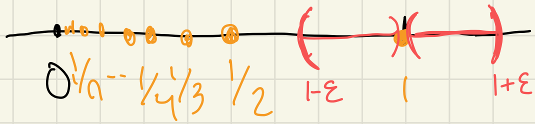
1) ~~¿$A' = [0,1]$?~~ 19%

2) ¿$A' = \emptyset$? 10%

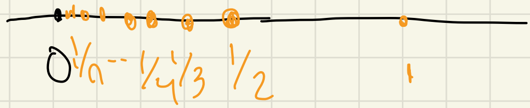
3) ~~¿$A' = (0,1]$?~~ 24%

4) ¿$A' = \{0\}$? 48%

5) Ninguna de las anteriores 0%



$1 \notin A'$



$$0 \in A' \iff \forall \varepsilon > 0 \quad E^*(0,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Si $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\varepsilon} < N$

porque $\mathbb{N}$ no está acotado

$$\Rightarrow \underset{\neq 0}{\frac{1}{N}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{N} \in E^*(0,\varepsilon)$$

$$\frac{1}{N} \in A$$

$$\Rightarrow E^*(0,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

Efectivamente $0 \in A'$

3) $\boxed{A = \mathbb{Q}}$

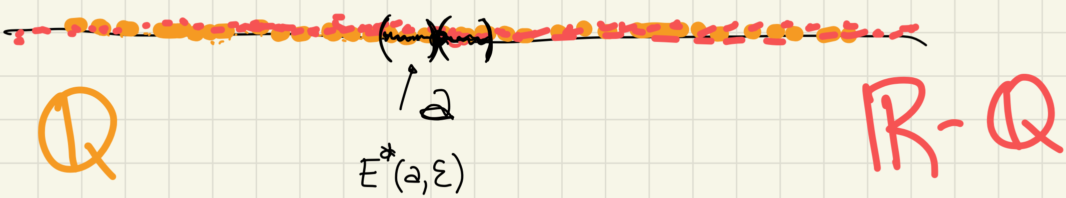
1) $A' = \{0\}$

2) $A' = \emptyset$

3) $A' = \mathbb{Q}$

4) $\boxed{A' = \mathbb{R}}$

5) Ninguna de las anteriores



$$a \in A' \iff \forall \varepsilon > 0 \quad E^*(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

4) $\boxed{A = \mathbb{N}}$ $\quad A' = \emptyset$

Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Todo conjunto infinito y acotado tiene (al menos) un punto de acumulación

Par de Sucesiones Monótonas Convergentes

Dem: PSMC $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un PSMC

si 1) a_n monótona creciente
b_n monótona decreciente

2) $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

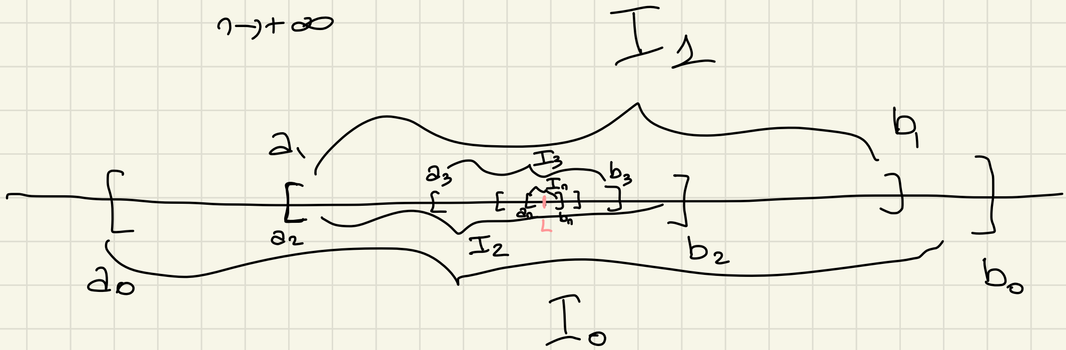
3) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$
$b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to+\infty} b_n$$

Aplicación: Sean $I_n = [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$$\cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots \subseteq I_2 \subseteq I_1 \subseteq I_0$$

$$b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$



$$\bigcap_{k=0}^{\infty} I_k = \{L\}$$

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente
  $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monotona decreciente
- $a_n \leq b_n$
- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$

$\Longrightarrow \exists\, L \in \mathbb{R}$ tq $\quad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$

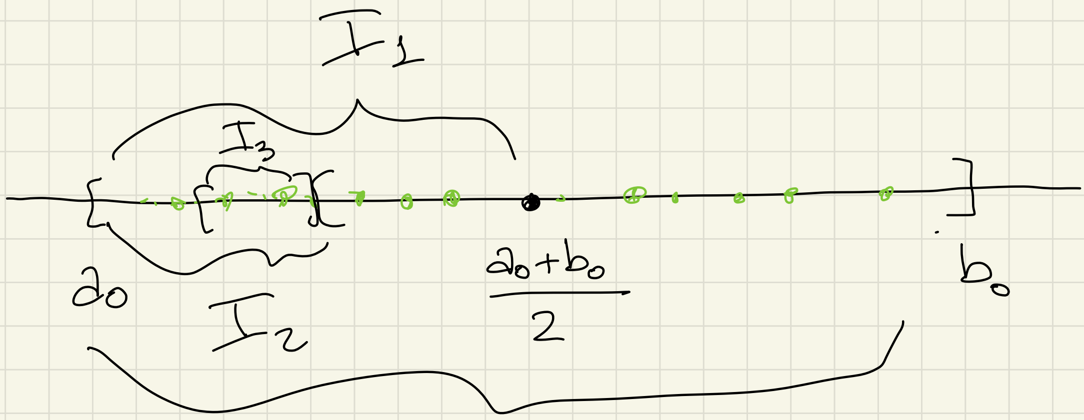
$$b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$$

$$\Rightarrow \bigcap_{k=0} I_k = \{L\}$$

Si A es un conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}$.

$\exists\ I_0 = [a_0, b_0] \subseteq \mathbb{R}$ tal que

$A \subseteq I_0$



I_0 tiene los infinitos elementos de A

Partimos a la mitad I_0 y nos quedemos con el intervalo que tenga infinitos elementos de A (puede pasar que ambos tengan infinitos elementos, en ese caso elegimos cualquiera)

Tomamos

$$\subseteq I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq I_0$$

de manera tal que I_n tenga infinitos elementos de A.

La longitud de $I_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$

que tiende a cero cuando $n \to +\infty$

$\Longrightarrow$ $\exists\, L \in \mathbb{N}$ tal que

Aplicación PSMC

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{L\}$$

L es un punto de acumulación de A: (Ejercicio)

Ejercicio: Pensar por qué las hipótesis son necesarias

A es infinito y acotado.

Teorema: Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.