Clase 9: Subsucesiones y puntos de acumulación

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenie Ellis

eellis@fing.edu.uy

Sucesiones

Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ cuando n tiende a infinito $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\cancel{\Leftarrow}$

$a_n = (-1)^n$ es una sucesión acotada y no tiene límite

$\exists L \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

$\Longleftarrow$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada + monótona creciente (decreciente)

Ejemplo: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

binomio de Newton

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!\, i!}$$

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i$$

$$a_1 = 2 = \binom{1}{0}\left(\frac{1}{1}\right)^0 + \binom{1}{1}\left(\frac{1}{1}\right)^1 = 1 + 1$$

$$a_2 = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{2}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2^2} = 1 + 1 + \frac{1}{4}$$

Para probar que existe el límite de la sucesión probamos que:

1) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ está acotada

$2 \leq a_n \leq 3$ entre 2 y 3

2) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es monótona creciente.

$a_n \leq a_{n+1}$

Ejercicio: Probar 1) y 2)
(opcional)

Límites equivalentes

Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ es cero en ambos casos ó ∞ en ambos casos, entonces decimos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

En funciones, $\operatorname{sen} x \sim x$

con $x \to 0$

porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\operatorname{sen} x = x + r_1(x) \qquad \frac{r_1(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\boxed{\operatorname{sen} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \quad n \to +\infty}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen} n \quad \nexists$$

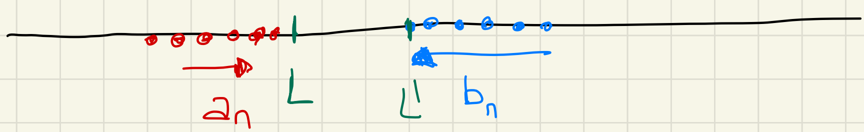
Par de Sucesiones Monótonas Convergentes.

Decimos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son un PSMC si

(i) a_n es monótona creciente
b_n es monótona decreciente

(ii) $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$



Ejercicio: Probar que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son un PSMC $\Rightarrow$

a) • $a_n \leq b_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

b) • $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L \qquad \exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L'$

c) $L \leq L'$

d) Demostrar que $L = L'$

Subsucesiones

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión y

n_k una sucesión de números

naturales.

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

estrictamente creciente

$$n_k \quad n_k: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

La composición de estas dos funciones forman una nueva sucesión de numeros reeles

estrictamente creciente

$\lim_{k\to+\infty} n_k = +\infty$

$$\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \xrightarrow[n_k]{} \mathbb{N} \xrightarrow[a]{} \mathbb{R}$$

Ejemplo: $a_n = (-1)^n$ $\qquad n_k = 2k$

$$a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$$

$\{a_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$a_{2k} = 1$ $\qquad a_n = (-1)^n$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge pero

$\{a_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a 1

$$a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$$

$\{a_{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión

que converge a -1.

$a_n = \text{Arctg}(n) \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \pi/2$

$\cancel{n \to (-1)^n}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una subsucesion} \\ \text{tal que } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L \\ \\ \{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ subsucesión} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = L$$

Dem: Sea $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$

$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - L| < \varepsilon$

$\forall n \geq n_0$. Como $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$

existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k > n_0$

$\forall\, k \geq k_0$

Concluimos que dado $\varepsilon > 0$ existe k_0

tal que si $k \geq k_0$

$$\Rightarrow \quad n_k > n_0 \Rightarrow |a_{n_k} - L| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = L$$

—— o ——

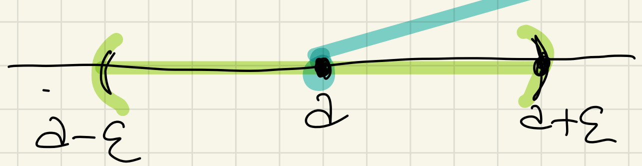
Def: punto de acumulación

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad a \in \mathbb{R}$ es un **punto de acumulación** de A sii

$$\forall \varepsilon > 0 \quad E^*(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

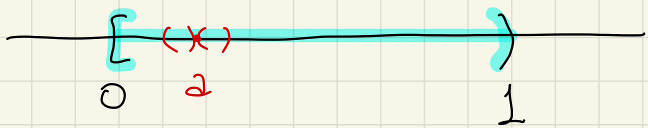
entorno reducido de centro a y radio ε

$$E^*(a, \varepsilon) = E(a, \varepsilon) - \{a\}$$



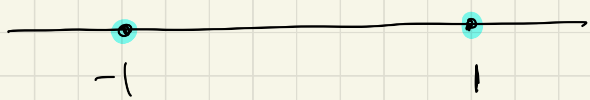
Ejemplos:

1) $A = [0,1)$



Los puntos de acumulación de A son $[0,1]$

2) $A = \{-1, 1\}$



A no tiene puntos de acumulación