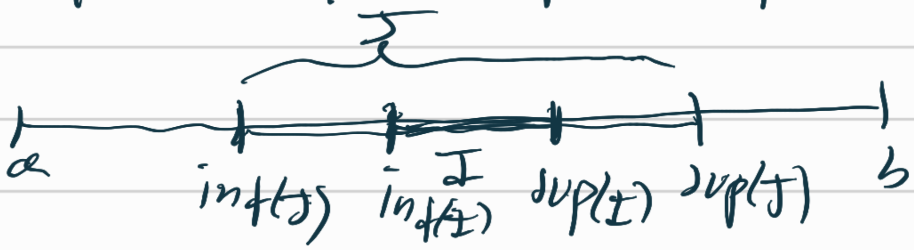
Clase 9 - Integrales (Parte 3)

Clase pasada: Si $I, J \subseteq [a,b]$ con $I \subseteq J$

$\Rightarrow \inf(J) \leq \inf(I) \leq \sup(I) \leq \sup(J)$



. $P = \{a_0 = a, a_1, a_2, \dots, a_n = b\}$

$$S_*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf(f, [a_i, a_{i+1}])$$

$$S^*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup(f, [a_i, a_{i+1}])$$

más fina que P

Prop. Si $P \subseteq Q$ son particiones de $[a,b]$

$$\Rightarrow S_*(f,P) \underset{①}{\leq} S_*(f,Q) \underset{②}{\leq} S^*(f,Q) \underset{③}{\leq} S^*(f,P)$$

Dem. ① Vamos a probar primero el caso en que $Q = P \cup \{c\}$

Sea $P = \{a_0 = a, a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n = b\}$

$Q = \{a_0 = a, a_1, \dots, a_i, c, a_{i+1}, \dots, a_n = b\}$

$S_*(f,Q) - S_*(f,P) = $ Área $-$ Área

$$= \underbrace{(c - a_i) \cdot \inf(f, [a_i, c])}_{(*)} + \underbrace{(a_{i+1} - c) \cdot \inf(f, [c, a_{i+1}])}_{(**)}$$

$$- (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf(f, [a_i, a_{i+1}])$$

$$\geq \underbrace{(c-a_i)\cdot \inf(f,[a_i,a_{i+1}])}_{(*)} + \underbrace{(a_{i+1}-c)\cdot \inf(f,[a_i,a_{i+1}])}_{(**)}$$

$$= (a_{i+1}-a_i)\cdot \inf(f,[a_i,a_{i+1}])$$

$$= (c-a_i+a_{i+1}-c-a_{i+1}+a_i)\cdot \inf(f,[a_i,a_{i+1}]) = 0$$

$$\therefore\ S_*(f,Q)-S_*(f,P)\geq 0 \Rightarrow S_*(f,P)\leq S_*(f,Q).$$

$$\{f(x): x\in[a_i,c]\} \subseteq \{f(x): x\in[a_i,a_{i+1}]\}$$

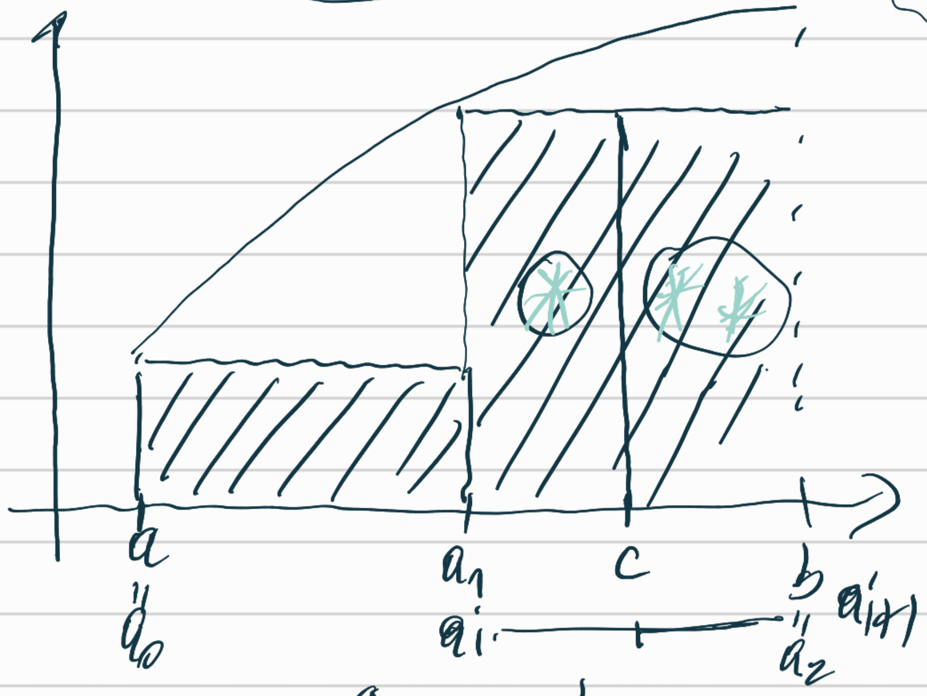
$$\Rightarrow \inf\{f(x), x\in[a_i,a_{i+1}]\} \leq \inf\{f(x): x\in[a_i,c]\}$$

La desigualdad (2) es obvia porque $\inf \leq \sup$

La desigualdad (3) se prueba análoga a la (1).

El caso general $Q = P \cup \{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ se obtiene aplicando muchas veces el caso especial.

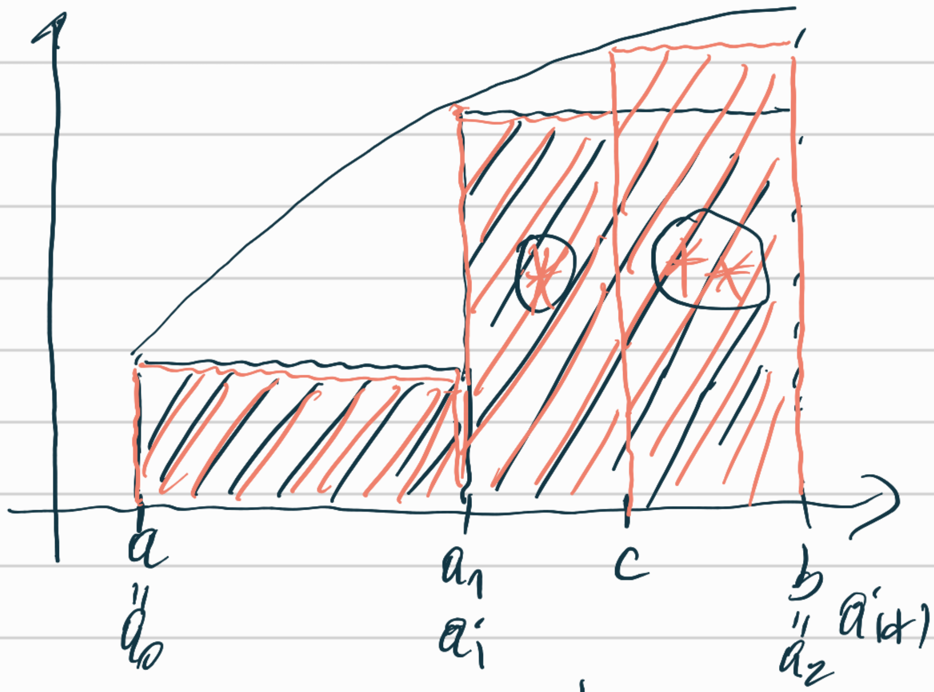
Idea:



$P = \{\overset{a}{a_0}, a_1, \overset{b}{a_2}\}$

$Q = \{a_0, a_1, c, a_2\}$

$S_*(f,P) =$ Área



$S_*(f,Q) =$ Área

Prop. Si P, Q son dos particiones de $[a,b]$

$$\Rightarrow S_*(f,P) \leq S^*(f,Q)$$

Dem. Consideramos la partición $P \cup Q$ y aplicamos la proposición anterior: $(P \subseteq P\cup Q$ y $Q \subseteq P \cup Q)$

$$S_*(f,P) \underset{P\subseteq P\cup Q}{\leq} S_*(f,P\cup Q) \underset{\inf \leq \sup}{\leq} S^*(f,P\cup Q) \underset{Q\subseteq P\cup Q}{\leq} S^*(f,Q)$$

$$\Rightarrow \underbrace{S_*(f,P) \leq S^*(f,Q) \quad \forall P,Q.}$$

Def. $I_*(f) = \sup\{S_*(f,P) : P \text{ partición de } [a,b]\}$ se llama integral inferior de f.

$I^*(f) = \inf\{S^*(f,Q) : Q \text{ partición de } [a,b]\}$ se llama integral superior de f.

Teo. $I_*(f) \leq I^*(f)$

Dem. Para todas particiones P, Q de $[a,b]$ se cumple:

$$\underbrace{S_*(f,P)}_{\text{cota inf}} \leq S^*(f,Q) \quad \forall Q$$

$$\Rightarrow S_*(f,P) \leq \inf\{S^*(f,Q) : Q \text{ part.}\} = I^*(f)$$

$\Rightarrow \quad s_*(f,P) \leq \underbrace{I^*(f)}_{\text{cota sup}}, \quad \forall$ partición P

$\Rightarrow \underbrace{\sup\{s_*(f,P) : P \text{ part.}\}}_{I_*(f)} \leq I^*(f)$.

Def. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada, Decimos que f es <u>integrable</u> si $I_*(f)=I^*(f)$ en este caso definimos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_*(f) = I^*(f)$$

"integral de f desde a hasta b".

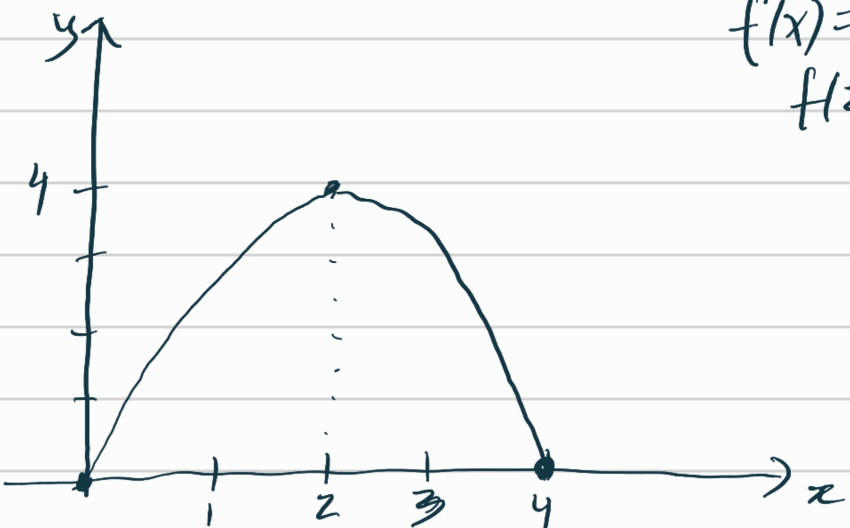
<u>Ejercicio:</u> Sea $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ / $f(x)=4x-x^2$
Calcular las sumas inferiores y superiores respecto de las siguientes particiones:

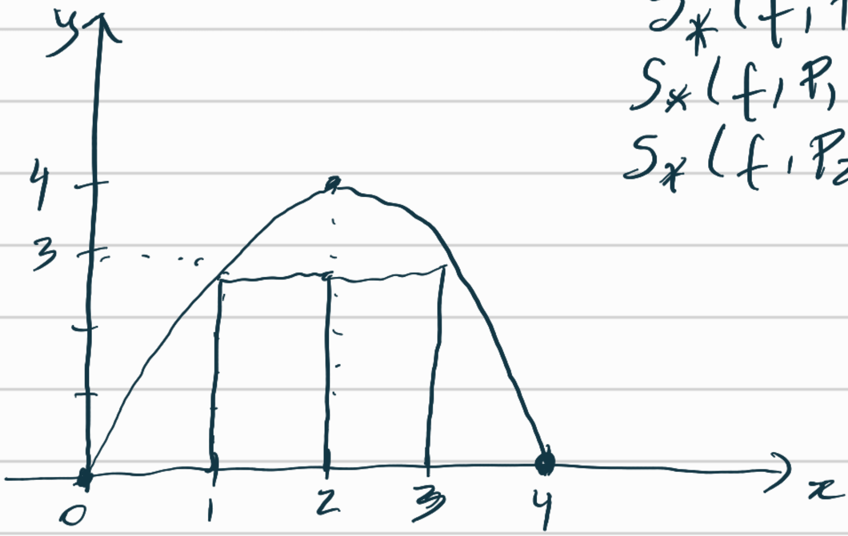
$P_0=\{0,4\}$, $P_1=\{0,2,4\}$
$P_2=\{0,1,2,3,4\}$

(Obs: $P_0\subseteq P_1\subseteq P_2$)

<u>Solución:</u>

$f'(x)=4-2x$
$f(2)=4$

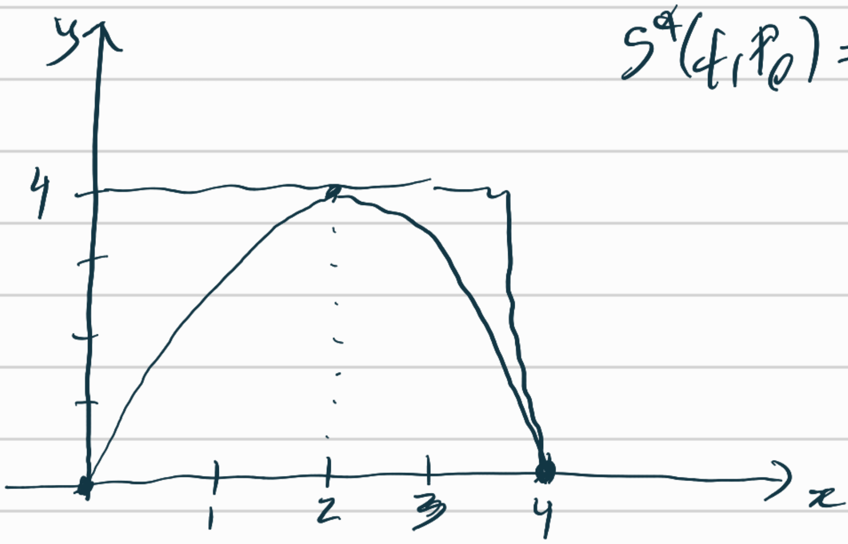




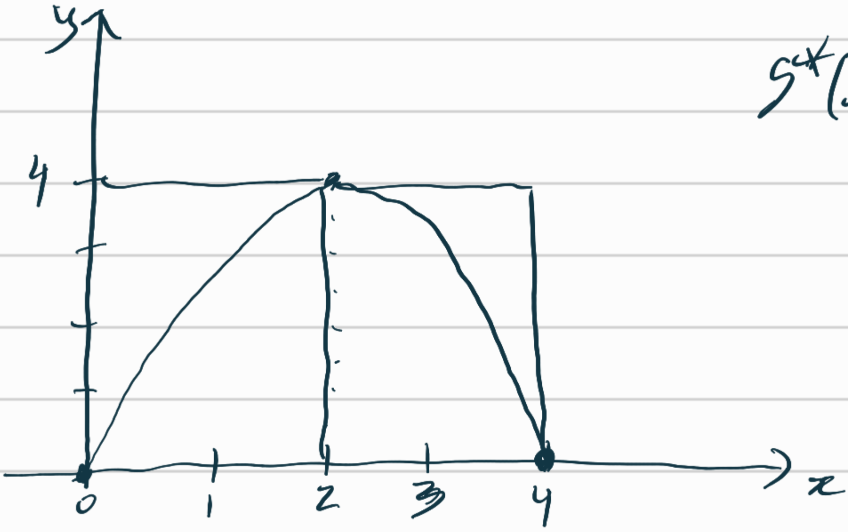
$S_*(f,P_0) = 4 \cdot 0 = 0$

$S_*(f,P_1) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$

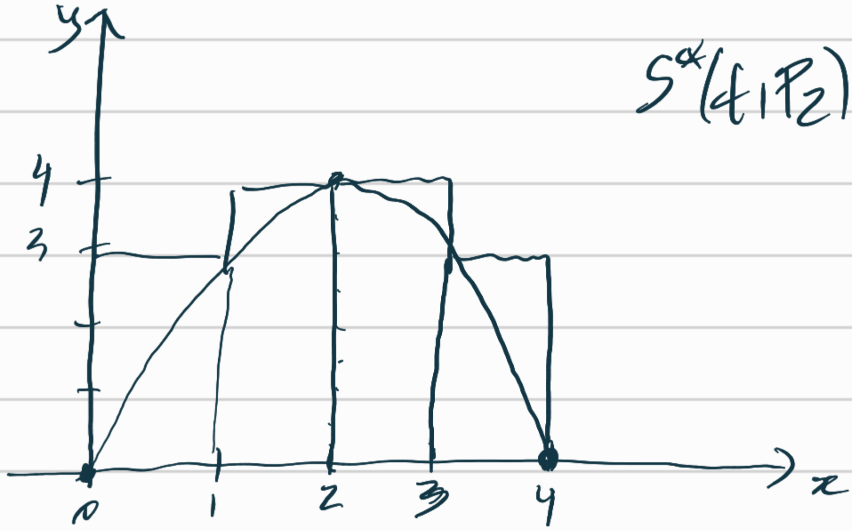
$S_*(f,P_2) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 6$



$S^*(f,P_0) = 4 \cdot 4 = 16$



$S^*(f,P_1) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 16$



$$S^*(f,P_2) = 1.3 + 1.4 + 1.4 + 1.3 = 14$$

$$\underset{0}{\underset{\|}{s_*(f,P_0)}} \le \underset{0}{\underset{\|}{s_*(f,P_1)}} \le \underset{6}{\underset{\|}{s_*(f,P_2)}} \le \int_0^4 f \le \underset{14}{\underset{\|}{S^*(f,P_2)}} \le \underset{16}{\underset{\|}{S^*(f,P_1)}}$$

—//—