Facultad de Ingeniería – Udelar

Departamento de Diseño industrial – IIMPI

MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTO FINITOS

REFERENTE CLASE #3

CLASE PRACTICA 1: INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE RIGIDEZ.

PROFESOR

Dr. Henry Figueredo Losada

Montevideo. Uruguay.
Noviembre 2019

TEMA I. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (FEM).

CLASE PRACTICA 1. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE RIGIDEZ.

Sumario.

1. Introducción.

2. Ejemplos expositivos.

3. Ejercicios propuestos.

Objetivos.

Ampliar y profundizar los conceptos dados en las clases teóricas con ejemplos expositivos que realicen los pasos principales en el análisis de sistemas discretos MEF.

Bibliografía.

1. G.R.Liu "The Finite element Method- A practical course".
2. Chandrupatla, Tirupathi R.; Belegundu, Ashok D. (1999). "Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería". México: Prentice Hall, 1999. ISBN: 978-970-17-0260-4.
3. O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor , J.Z.Zhu. (2010) "El método de los Elementos finitos. Vol 1: Las Bases". Editorial CIMNE. ISBN: 978-84-96736-71-9.
4. Larry J. Segerlind (1984) "Applied Finite Element Analysis", 2nd Edition. published by Wiley. ISBN: 978-0-471-80662-2

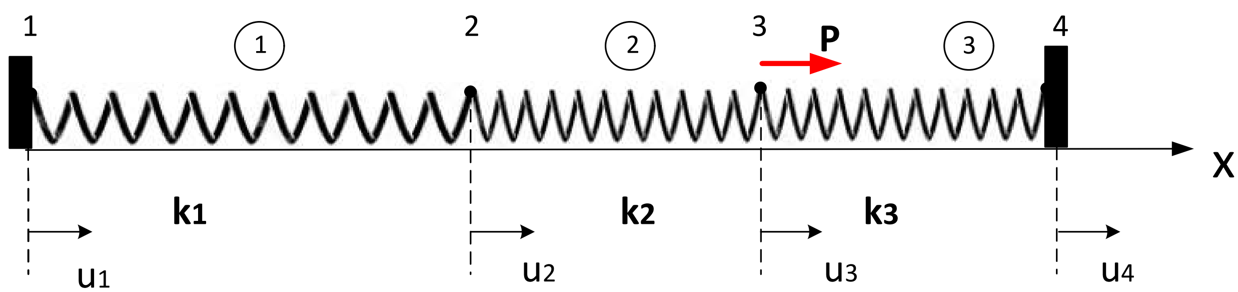
1. Introducción.

Cada tema estará provisto de algunos problemas que sirven como ejemplos para mejorar la compresión de los temas tratados en las clases teóricas. En la mayoría de las veces el *Ejemplos 1.1* será utilizado para la generación del programa en Octave que será desarrollado en los LABORATORIOS. El estudiante deberá hacer un esfuerzo para resolver los problemas propuestos. Alentamos el uso de sus programas elaborados y paquetes comerciales para evaluar y suplementar el proceso de aprendizaje. En la Bibliografía encontraran libros recomendados.

2. Ejemplos expositivos.

Consideremos un ejemplo de un sistema discretamente conectado.

Ejemplo 1.1 : Dado el sistema resortes mostrado en la Fig. 1 , donde los nodos 1 y 4 están restringidos al desplazamiento , $u_1 = u_2 = 0$ y considerando las constantes elásticas de los resortes $k_1 = 100\ N/mm$; $k_2 = 200\ N/mm$; $k_3 = 100\ N/mm$ y $P = 500\ N$.



Obtenga:

1. La matriz de rigidez **[K]** y el vector de fuerzas **{F}** que representan el comportamiento del sistema.
2. Calcular los desplazamientos de los nodos 2 y 3
3. Calcular las fuerzas de reacción de los nodos 1 y 4.
4. Calcular la fuerza de tracción o compresión a la que está sometido el resorte 2.

Solución.

Utilizando la Ec. (2.15) matriz de rigidez del elemento resorte para el montaje de las matrices de rigidez de cada uno de los elementos como:

$$[k]^1 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} ; [k]^2 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} ; [k]^3 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$$

Estableciendo analogía con el ejemplo del ítem 6 Fig. 2.6 y basado en el DCL de cada nodo, igualando las fuerzas externas a las fuerzas internas en cada nodo, podemos escribir las ecuaciones nodales de equilibrio en los nodos 1,2,3,4.

Nodo 1: $F_{1x} = f_{1x}{}^{(1)}$	(1.1)
Nodo 2: $F_{2x} = f_{2x}{}^{(1)} + f_{2x}{}^{(2)}$	(1.2)
Nodo 3: $F_{3x} = f_{3x}{}^{(2)} + f_{3x}{}^{(3)}$	(1.3)
Nodo 4: $F_{4x} = f_{4x}{}^{(3)}$	(1.4)

Recordando que los desplazamientos

$u_{2x}{}^{(1)} = u_{2x}{}^{(2)} = u_{2x} ; u_{3x}{}^{(2)} = u_{3x}{}^{(3)} = u_{3x}$	(1.5)

Se sustituyen para cada $f_{ix}{}^{(i)}$ en las Ec. (1.1) -(2.4) tendremos

$$F_{1x} = k_1 u_{1x} - k_1 u_{2x} \tag{1.6}$$

$$F_{2x} = -k_1 u_{1x} + (k_1 + k_2) u_{2x} - k_2 u_{3x} \tag{1.7}$$

$$F_{3x} = -k_2 u_{2x} + (k_2 + k_3) u_{3x} - k_3 u_{4x} \tag{1.8}$$

$$F_{4x} = -k_3 u_{3x} - k_3 u_{4x} \tag{1.9}$$

En la forma matricial nuestro sistema queda como:

$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \\ F_{4x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{2x} \\ u_{3x} \\ u_{4x} \end{pmatrix}$	(1.10)

En lo referente a las fuerzas externas las únicas componentes conocidas son las fuerzas en los nodos intermedios 2 y 3, que son $F_{2x} = 0$ y $F_{3x} = P$. Utilizando la expresión para relaciona fuerza – desplazamientos Ec. (2.29).

$\{F\}=[K]\cdot\{d\}; \quad \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{2x} \\ F_{3x} \\ F_{4x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100+200 & -200 & 0 \\ 0 & -200 & 200+100 & -100 \\ 0 & 0 & -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{1x} \\ u_{2x} \\ u_{3x} \\ u_{4x} \end{pmatrix}$	(1.11)

Nótese que la matriz de rigidez es simétrica, y se puede observar que se tienen 4 ecuaciones y 4 incógnitas, que en principio son los desplazamientos y el vector de fuerzas externas que en principio es conocido. Para resolver la Ec. (1.11) tenemos que introducir las condiciones de frontera (o apoyo) o de lo contrario puede ser verificado que la matriz **[K]** es singular, es decir, el determinante de **[K]** seria cero y su inversa no existiría, significando que el sistema es inestable, la estructura será libre de moverse como un sólido rígido. Las condiciones de contorno para el modelo en este caso serian:

$u_{1x} = u_{4x} = 0$	(1.12)

Ahora son desconocidas las fuerzas asociadas a los nodos 1 y 4, que son las reacciones en los apoyos.

$\begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 100+200 & -200 \\ -200 & 200+100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2x} \\ u_{3x} \end{Bmatrix}$	(1.13)

Resolviendo la Ec. (1.13) se obtiene:

$\begin{Bmatrix} u_{2x} \\ u_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P/250 \\ 3P/500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} mm$	(1.14)

A partir de la Ec. (1.11) y conocidos los desplazamientos u_{2x} y u_{3x} , se obtienen:

$F_{1x} = -100u_{2x} = -200\ N$	(1.15)

$F_{4x} = -100u_{3x} = -300\ N$	(1.16)

Para el cálculo de la fuerza interna a la que está sometido el resorte 2 partimos de la ecuación local Ec. (2.20).

$\begin{Bmatrix} f_{2x}{}^{(2)} \\ f_{3x}{}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2x} \\ u_{3x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$	(1.17)

Obtenemos

$\begin{Bmatrix} f_{2x}{}^{(2)} \\ f_{3x}{}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ 200 \end{bmatrix} \ \therefore\ f_{3x}{}^{(2)} = -f_{2x}{}^{(2)}$	(1.18)

La fuerza interna resultante para el nodo 3 tiene que ser igual a fuerza aplicada *P*, calculemos la fuerza para el elemento 3:

$\begin{Bmatrix} f_{3x}{}^{(3)} \\ f_{4x}{}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3x} \\ u_{4x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$	(1.19)

Resultando

$\begin{Bmatrix} f_{3x}{}^{(3)} \\ f_{4x}{}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ -300 \end{bmatrix} \ \therefore\ f_{3x}{}^{(3)} = -f_{4x}{}^{(3)}$	(1.20)

Utilizando la Ec. (1.3) la resultante en el nodo 3:

$F_{3x} = f_{3x}{}^{(2)} + f_{3x}{}^{(3)}\ ;\ \ F_{3x} = 200\ N + 300\ N\ \ \therefore\ F_{3x} = 500\ N$	(1.21)

Ejemplo 1.2:

Dado el sistema resortes mostrado en la Fig. 2 , donde los nodos A y E están restringidos al desplazamiento y considerando las constantes elásticas de los resortes $k_1 = 200\ kg/mm$; $k_2 = 100\ kg/mm$; $k_3 = 150\ kg/mm$; $k_4 = 300\ kg/mm$; $k_5 = 400\ kg/mm$; $k_6 = 500\ kg/mm$ y $F_B = 400\ kg$; $F_c = 300\ kg$; $F_D = 500\ kg$. Calcular los desplazamientos nodales, reacciones en los vínculos y las fuerzas internas en cada uno de los elementos.

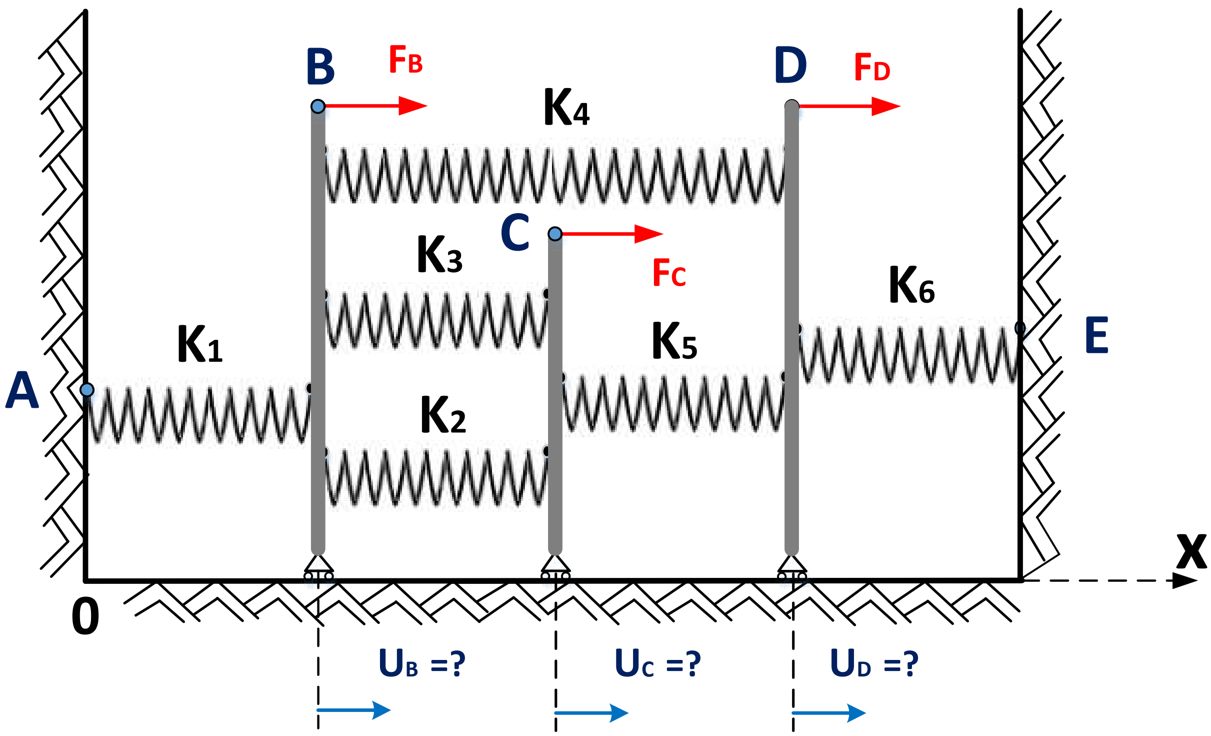


Figura 2. Sistema mecánico formado con elementos de tipo resortes. Ejercicio adaptado (Alves Filho 2018).

Solución

Análisis del modelo físico - Definición del modelo discreto:

Como un primer paso debe ser divida la estructura real en un montaje de elementos, que sean adecuados para simular el problema físico objetivo de investigar. En el modelo de la Fig. 2 son identificados los nodos los cuales relacionan el trabajo de cada elemento.

Como observación importante los carros permiten apenas una translación horizontal en el eje x y por ejemplo todos los resortes vinculados al carro B tienen el mismo desplazamiento, para propósitos de análisis es como si todos lo resortes estuvieran presos a un mismo punto B y la misma consideración se aplica los otros resortes del modelo.

Determinar la matriz de rigidez de cada elemento y *representarlo en sistema de coordenadas de la estructura,* utilizando la Ec. (2.15) matriz de rigidez del elemento resorte para el montaje de las matrices de rigidez de cada uno de los elementos como:

$$[k]^1 = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix};\ [k]^2 = \begin{bmatrix} 100 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix};\ [k]^3 = \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 150 \end{bmatrix} \qquad (1.22)$$

$$[k]^4 = \begin{bmatrix} 300 & -300 \\ -300 & 300 \end{bmatrix};\ [k]^5 = \begin{bmatrix} 400 & -400 \\ -400 & 400 \end{bmatrix};\ [k]^6 = \begin{bmatrix} 500 & -500 \\ -500 & 500 \end{bmatrix} \qquad (1.23)$$

Cada elemento del modelo está definido por su matriz de rigidez.

La rigidez de la estructura completa depende de la rigidez de cada uno de sus elementos, ahora realizamos el ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura a partir de las matrices de rigidez de cada uno de sus elementos utilizando el método de superposición o Método de Rigidez Directo.

$$[K]=\begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ -200 & 200+100+150+300 & -100-150 & -300 & 0 \\ 0 & -100-150 & 100+150+400 & -400 & 0 \\ 0 & -300 & -400 & 300+400+500 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 500 \end{bmatrix} \qquad (1.24)$$

En lo referente a las fuerzas externas las componentes conocidas son las fuerzas en los nodos B, C y F, que son $F_{Bx} = 400\ kg$, $F_{cx} = 300\ kg$ y $F_{Dx} = 500\ kg$. Utilizando la expresión para relacionar fuerza – desplazamientos Ec. (2.29).

$$\begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \\ F_D \\ F_E \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ -200 & 200+100+150+300 & -100-150 & -300 & 0 \\ 0 & -100-150 & 100+150+400 & -400 & 0 \\ 0 & -300 & -400 & 300+400+500 & -500 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 500 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \\ U_D \\ U_E \end{pmatrix}$$	(1.25)

Esta Ec. (1.23) representa las ecuaciones de equilibrio de la estructura, *nótese que a diferencia del Ejemplo 1.1 pasamos directo a la construcción de la matriz de rigidez de la estructura sin construir* ***DCL*** *de cada nodo*, representemos el sistema de ecuaciones nodales de equilibrio a partir de la Ec. (1.25) a modo de ejemplo:

$F_A = 200 \cdot U_A - 200 \cdot U_B + 0 \cdot U_C + 0 \cdot U_D + 0 \cdot U_E$	(1.26)
$F_B = -200 \cdot U_A + 750 \cdot U_B - 250 \cdot U_C - 300 \cdot U_D + 0 \cdot U_E$	(1.27)
$F_C = 0 \cdot U_A - 250 \cdot U_B + 650 \cdot U_C - 400 \cdot U_D + 0 \cdot U_E$	(1.28)
$F_D = 0 \cdot U_A - 300 \cdot U_B - 400 \cdot U_C + 1200 \cdot U_D - 500 \cdot U_E$	(1.29)
$F_E = 0 \cdot U_A + 0 \cdot U_B + 0 \cdot U_C - 500 \cdot U_D + 500 \cdot U_E$	(1.30)

Para resolver la Ec. (1.25) tenemos que introducir las condiciones de frontera (o apoyo) o de lo contrario puede ser verificado que la matriz **[K]** es singular, ya sabemos la imposibilidad de resolver este sistema debido al movimiento de cuerpo rígido, puesto que el sistema completo representa la estructura sin ningún vínculo. La estructura es restricta en A y E, las fuerzas externas aplicadas son F_B , F_C, F_D, y F_A, F_E son reacciones de apoyo e incógnitas en el modelo. Las condiciones de contorno para el modelo en este caso serian:

$U_{Ax} = U_{Ex} = 0$	(1.31)

Aplicando las condiciones de frontera

$$\begin{Bmatrix} F_B \\ F_C \\ F_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 & -250 & -300 \\ -250 & 650 & -400 \\ -300 & -400 & 1200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{Bx} \\ U_{Cx} \\ U_{Dx} \end{Bmatrix}$$	(1.32)

De la Ec. (1.32) serán calculados los desplazamientos nodales:

$$\begin{Bmatrix} U_{Bx} \\ U_{Cx} \\ U_{Dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1043/543 \\ 399/181 \\ 886/543 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.92081 \\ 2.20441 \\ 1.63167 \end{Bmatrix} mm$$	(1.33)

A partir de la Ec. (1.25) o Ec. (1.26) -(1.30) y conocidos los desplazamientos U_B , U_C y U_D , se obtienen las reacciones A y E en la estructura:

$$F_A = -384{,}168\ kg$$	(1.34)
$$F_E = -815{,}825\ kg$$	(1.35

La convención de fuerzas indica que estas presentan sentidos opuestos a las fuerzas aplicadas. Nótese que, si sumamos todas las fuerzas actuantes en la estructura, fuerzas aplicadas externas y reacciones el resultado será igual a 0, recordándonos que la estructura se encuentra en equilibrio.

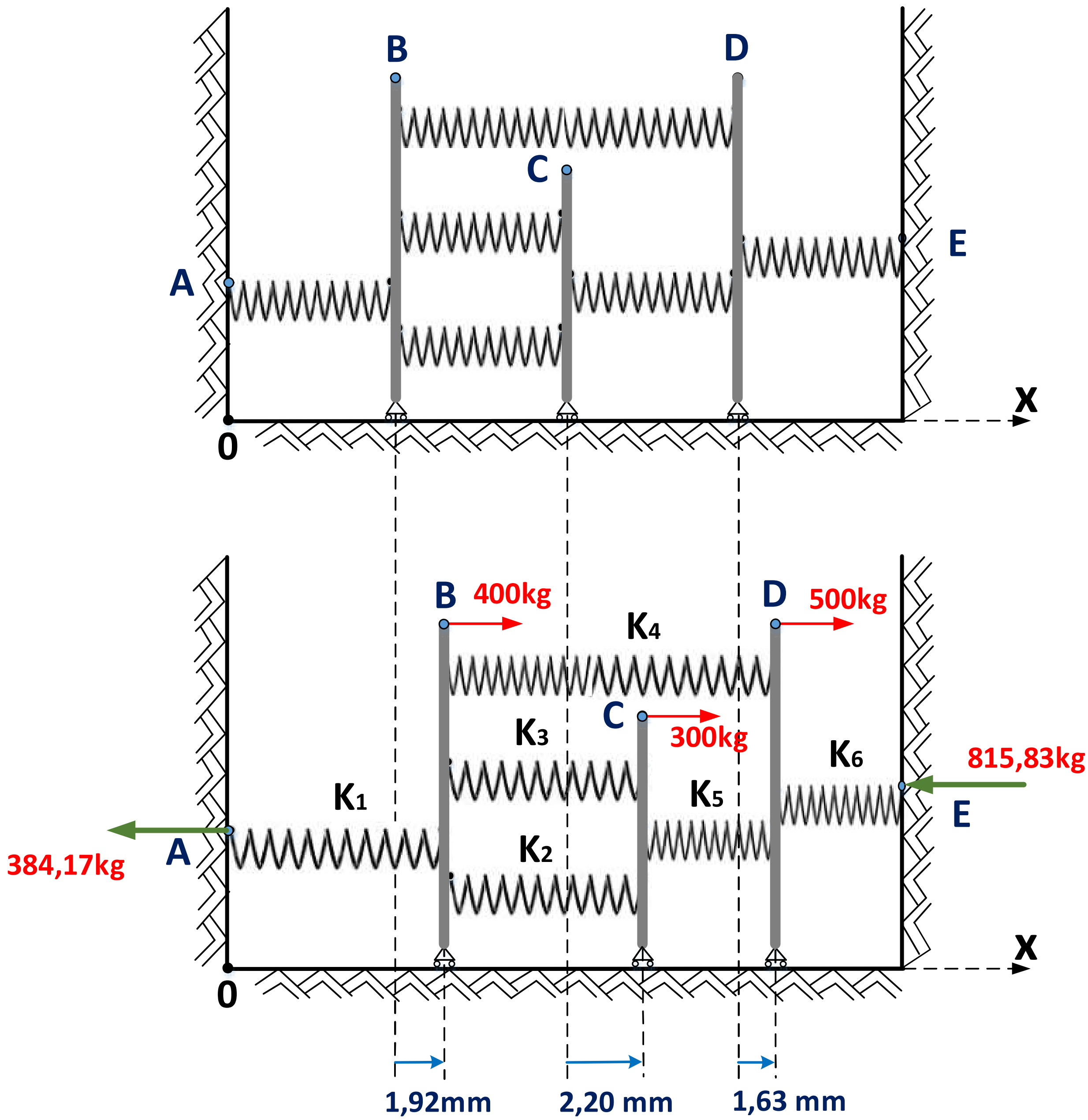


Figura 3. Sistema deformado.

En función de los desplazamientos obtenidos podemos concluir:

- El resorte 1 está a *tracción*;
- Los resortes 2 y 3 están a *tracción*;
- El resorte 4 está a *compresión*;
- El resorte 6 está a *compresión*.

Con los desplazamientos asociados a cada nodo podemos determinar las fuerzas internas en cada elemento como:

$\mathcal{F}_1 = k_1(U_B - U_A) = 384{,}17\ kg$	(1.36)
$\mathcal{F}_2 = k_2(U_C - U_B) = 28{,}36\ kg$	(1.37)
$\mathcal{F}_3 = k_3(U_C - U_B) = 42{,}52\ kg$	(1.38)
$\mathcal{F}_4 = k_4(U_D - U_B) = -86{,}76\ kg$	(1.39)
$\mathcal{F}_5 = k_5(U_D - U_C) = -229{,}11\ kg$	(1.40)
$\mathcal{F}_6 = k_6(U_E - U_D) = -815{,}83\ kg$	(1.41)

3. Ejercicios Propuestos.

Ejercicio Propuesto 1.1: La barra central está definida como rígida y asuma los valores de $k_i = 1$.

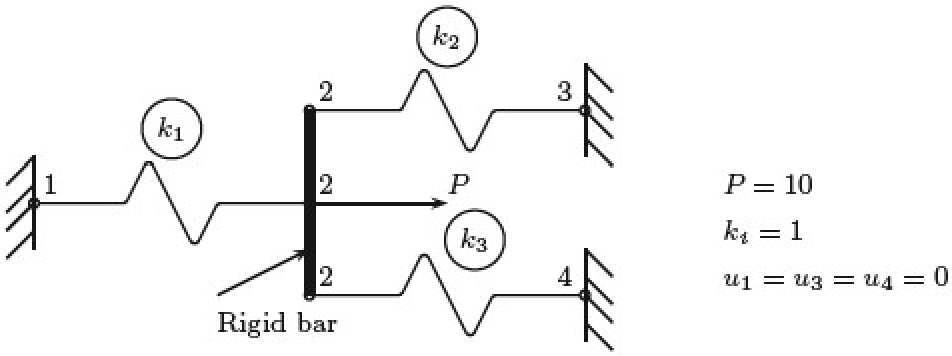


Figura 1.1 Sistema mecánico formado con elementos de tipo resortes.

Obtenga:

1. La matriz de rigidez **[K]** y el vector de fuerzas **{F}** que representan el comportamiento del sistema.
2. Calcular los desplazamientos de los nodos.
3. Calcular las fuerzas de reacción de los nodos 1 ,3 y 4.
4. Calcular la fuerza de tracción o compresión a la que está sometidos los resortes.

Ejercicio Propuesto 1.2: Para el sistema mecánico mostrado en la Fig. 1.2. La constante elástica k =200 kN/m y P=10 N

Figura 1.2 Sistema mecánico formado con elementos de tipo resortes.

Obtenga:

1. La matriz de rigidez **[K]** y el vector de fuerzas **{F}** que representan el comportamiento del sistema.

2. Calcular los desplazamientos de los nodos.
3. Calcular las fuerzas de reacción de los nodos 1 y 5.
4. Calcular la fuerza de tracción o compresión a la que está sometidos los resortes.

Ejercicio Propuesto 1.3: Resolver el ejercicio 1.2 con P=0 y el nodo 5 fijo, conociendo el desplazamiento de δ= 20.0 mm como se muestra en la Fig. 1.3.

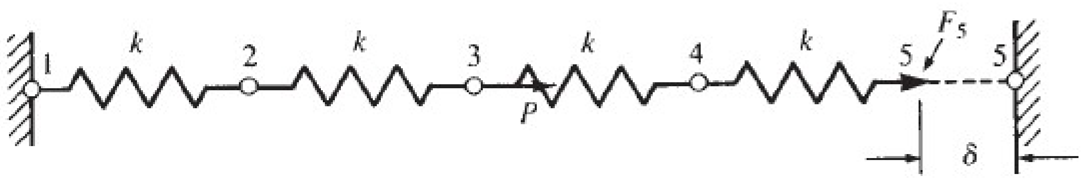


Figura 1.3 Sistema mecánico formado con elementos de tipo resortes.

Ejercicio Propuesto 1.4: Dos carros son conectados como se muestra en la Fig. 1.4. a) Determine el sistema de ecuaciones de equilibrio para el sistema en la forma $[K]\{U\} = \{F\}$. b) Si k=50 lb/in, $F_1 = 20\ lb$ y $F_2 = 15\ lb$, calcule los desplazamientos de cada carro y las fuerzas en cada resorte.

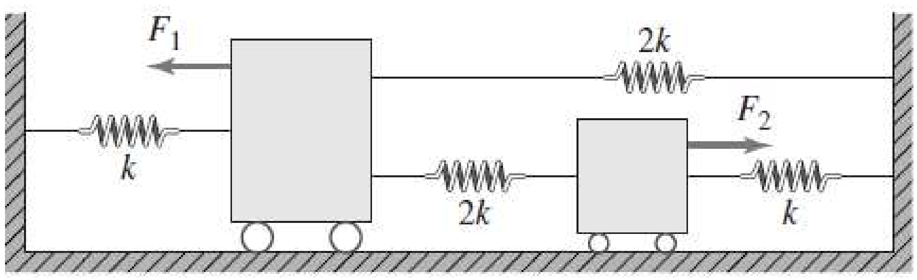


Figura 1.4 Sistema mecánico formado con elementos de tipo resortes.

Ejercicio Propuesto 1.5: Para el sistema mecánico mostrado en la Fig 1.5, determine el desplazamiento en los nodos 2 y 3 y la reacción en los nodos 1 y 4. Asuma que las barras verticales son rígidas en los nodos 2 y 3 y permanecen horizontales todo el tiempo. En el nodo 3 se aplica una fuerza de 1000 N. Los valores de las constantes elásticas de los resortes son $k_1 = 500\frac{N}{mm}$; $k_2 = k_3 = 300\frac{N}{mm}$; $k_4 = k_5 = 400\ N/mm$, respectivamente.

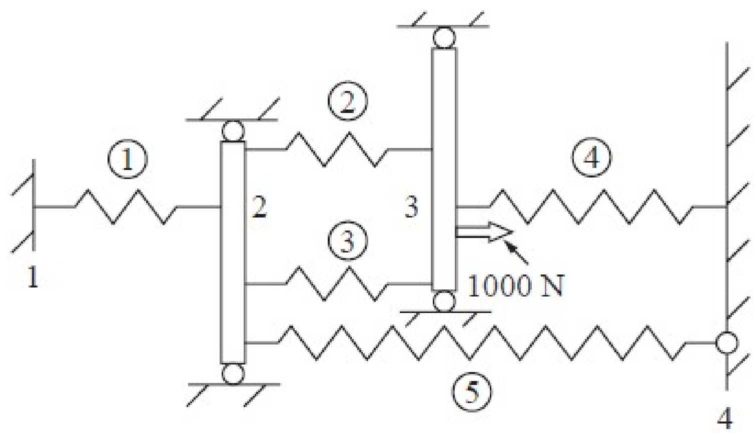


Figura 1.5 Sistema mecánico formado con elementos de tipo resortes.

Ejercicio Propuesto 1.6: En cada uno de los sistemas mostrados en la Fig. 1.6, bloques rígidos son conectados por resortes lineales, asumiendo que solo existe desplazamiento horizontal para todos. En cada caso escriba la ecuación reducida de equilibrio global en términos de las constantes elásticas de los resortes k^{i}., los desplazamientos desconocidos u_1 y cargas aplicadas f_i. Utilice la numeración para los nodos siguiendo la Fig. 1.6.

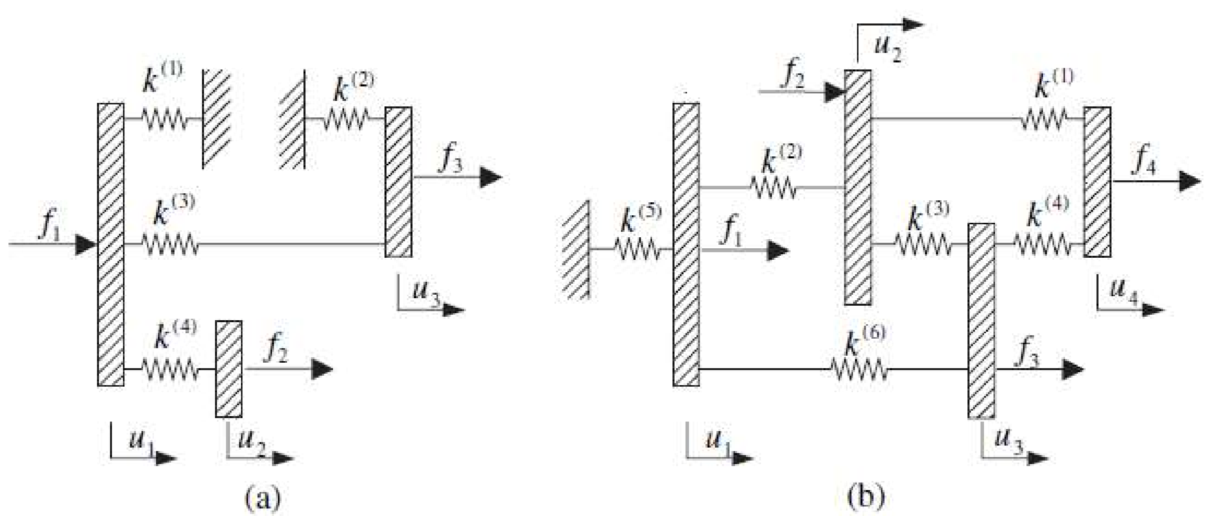


Figura 1.6 Sistema mecánico formado con elementos de tipo resortes.