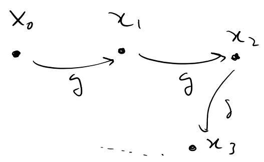
Repaso: $\boxed{\text{Un M.I.M converge si.i. } \rho(Q) < 1.}$

Métodos Iterativos

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \to \text{elemento inicial, en } \mathbb{R}^n \\ x^{k+1} = g(x^k) \quad , \quad g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \text{ queremos resolver } \boxed{Ax=b}$$



Métodos Iterativos Matriciales

$$g(x) = \underline{Q}x + r \, , \quad r \in \mathbb{R}^n \, , \quad Q \in M_n(\mathbb{R})$$

Radio espectral: $\rho(Q) = \max\limits_{\lambda \text{ v.p. } Q} |\lambda|$

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix} = D - E - F$$

Jacobi:

$$Q_J = D^{-1}(E+F)$$

$$r_J = D^{-1} b$$

$Ax=b$ "difícil"

$\hookrightarrow x = A^{-1} b$

M. Gauss-Seidel

$$Q_{GS} = (D-E)^{-1} F$$

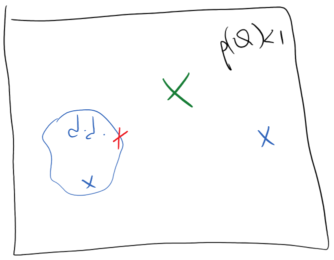
$$r_{GS} = (D-E)^{-1} b$$

Resultado (suficiente) Si A es diagonal dominante por fila o columna

$$\left(\begin{array}{ll} |a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ij}| & \text{por fila} \\ |a_{ii}| > \sum\limits_{j \neq i} |a_{ji}| & \text{por columna} \end{array} \right)$$

$\Downarrow$

Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen



Ejercicio 12 (Convergencia I). Se considera $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$. Sin calcular $\rho(Q)$, indicar un rango de valores de β que asegure la convergencia de Jacobi y de Gauss-Seidel.

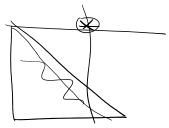
Por filas: $|3| > |-1|$ ✓ Por columnas $|3| > 1$

$|\beta| > |1| = 1$ $|\beta| > |-1| = 1$

Si $|\beta| > 1$, A d.d. $\Rightarrow$ J. y G-S convergen

Ejercicio 13 (Convergencia II). Analizar, según $\alpha \in \mathbb{R}$, las propiedades de convergencia de los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para la resolución de un sistema lineal cuya matriz es

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}. \quad \rightsquigarrow \text{ calculamos } \rho(Q_J) \text{ y } \rho(Q_{GS})$$



d.d. : $|\alpha| > 1$

$\underline{\rho(Q_J)}$:

$$Q_J = D^{-1}(E+F) = \frac{1}{\alpha}\, Id. \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_{Q_J} = -\lambda^3 + \frac{\lambda}{\alpha^2} = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \rightsquigarrow \boxed{\lambda = 0, \pm\frac{1}{\alpha}}$$

$$\rho(Q_J) = \frac{1}{|\alpha|}$$

$$\rho(Q_J) < 1 \iff |\alpha| > 1$$

$\underline{\rho(Q_{GS})}$:

$$Q_{GS} = (D-E)^{-1} F = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ 0 & \alpha & \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha^2} & 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} (F)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\alpha} + \alpha \cdot x = 0 \Rightarrow x = \frac{0 - \frac{1}{\alpha}}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}.$$

$$\chi(Q_{GS}) = -\lambda^2\left(\lambda - \frac{1}{\alpha^2}\right) \rightsquigarrow \lambda = 0, \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \rho(Q_{GS}) = \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\rho(Q_{GS}) < 1 \iff \alpha^2 > 1 \iff |\alpha| > 1$$

Ejercicio 14 (Convergencia III).

a) Sin hallar Q, indicar si el método de Jacobi es convergente para las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 5 & -2 & -10 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -10 \end{bmatrix}.$$

J como G-S son convergentes

b) Verificar que la matriz

$$A_3 = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$$

no es diagonal dominante. Demostrar, sin embargo, que el método de Jacobi es convergente para esta matriz.

c) Repetir los puntos anteriores para el método de Gauss-Seidel.

$\boxed{\text{Si } A \in M_n(\mathbb{R}) \quad \chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n - (-1)^{n-1} tr(A) \lambda^{n-1} + \ldots\ldots + \det A}$

$\boxed{\text{Si } A \in M_2(\mathbb{R}) \quad \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A)}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \frac{1}{ad-bc}.$$

$\rho(Q_J)$:

$$Q_J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 \\ \frac{8}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{Q_J}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{24}{25} \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{24}{25}}$$

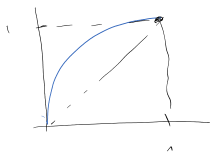
$$\boxed{\rho(Q_J) = \sqrt{\frac{24}{25}}} < 1$$

$\rho(Q_{GS})$:

$$Q_{GS} = (D-E)^{-1} F = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{25} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 \\ 0 & 24/25 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{Q_{GS}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 24/25)$$

$$\boxed{\rho(Q_{GS}) = \frac{24}{25}} < 1$$



Ejercicio 15 (Implementación).

a) Escribir un programa `Jacobi(A,b,x0,tol,maxiter)` que implemente el método de Jacobi para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ utilizando como punto de partida el punto `x0`, una tolerancia para la condición de parada `tol` (se debe elegir una condición adecuada), y que tenga una cota en el número de iteraciones `maxiter`. La salida del programa debe ser `[sol, error]` siendo `sol` la solución encontrada, y `error` un vector conteniendo la distancia entre cada iterado y la solución final `sol`. Graficar y estudiar los resultados obtenidos, probando con diferentes tolerancias y diferentes tipos de condición de parada.

error (1)

error (2)

error (3)

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_{k^*}$

$|x_{k^*} - x_{k^*-1}| < tol.$

matriz

$$\mathrm{diag}(A) = \text{vector} = (a_{11}, \dots, a_{nn})$$

vector

$$\mathrm{diag}(v) = \begin{pmatrix} v_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & v_n \end{pmatrix}$$

Ejercicio 16 (Radio espectral grande). El objetivo de este ejercicio es analizar qué ocurre con una sucesión $\{x^k\}$ generada mediante la iteración estacionaria

$$\mathbf{x}^{k+1} = Q\mathbf{x}^k + \mathbf{r}, \quad \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$$

en el caso en que $\rho(Q) \geq 1$.

a) Sea $\mathbf{e}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*$ el error en el paso k-ésimo. Demostrar que se cumple la ecuación $\mathbf{e}^k = Q^k\mathbf{e}^0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

b) Probar que si $\mathbf{e}^0$ es un valor propio de Q con valor propio asociado λ, entonces $\mathbf{e}^k = \lambda^k\mathbf{e}^0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

c) Probar que, si Q tiene un valor propio λ tal que

a) $|\lambda| < 1$, entonces existe un $\mathbf{x}^0$ tal que $\mathbf{x}^k$ converge a $\mathbf{x}^*$;

b) $|\lambda| = 1$, entonces existe un $\mathbf{x}^0$ tal que $\|\mathbf{e}^k\|_2$ permanece constante, y por lo tanto la iteración no converge;

c) $|\lambda| > 1$, entonces existe un $\mathbf{x}^0$ tal que $\|\mathbf{e}^k\|_2 \to \infty$, y por lo tanto la iteración diverge.

a) x^* es la solución a $Ax = b$, por lo tanto, es el punto fijo de g.

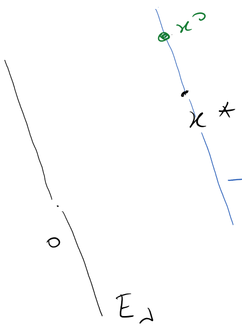
$$\boxed{x^* = Qx^* + r}$$

$$e^{k+1} = x^{k+1} - x^*$$
$$= Qx^k + r - x^* = Qx^k + r - (Qx^* + r)$$
$$= Q(x^k - x^*) = Qe^k$$
$$= \dots \text{ (análogamente)}$$
$$= Q^{k+1}e^0$$

b) Si e^0 es v.p. $\Rightarrow$ $\boxed{Qe^0 = \lambda e^0}$ def. de v.p

$$\Rightarrow e^k = Q^k e^0 = \lambda^k e^0$$

c) λ v.p. de Q.



Si $x^0 \in E_\lambda + x^* \Rightarrow x^0 - x^* \in E_\lambda$

$\Rightarrow$ $\boxed{x^0 - x^* = e^0}$ es vector propio asociado a λ.

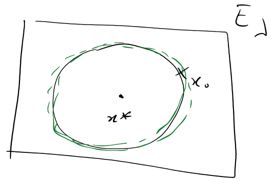
$\rightarrow E_\lambda + x^*$ y es un subesp. afín

$\dim(E_\lambda) \geq 1$

(i) $|\lambda| < 1 \Rightarrow e^k = \lambda^k e^0 \xrightarrow[k]{} 0 \Rightarrow \boxed{x^k \rightarrow x^0}$

(ii) $|\lambda| = 1 \Rightarrow e^k = \lambda^k e^0$

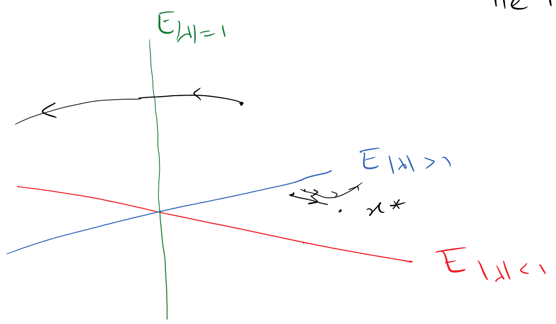
$$\|e^k\|_2 = |\lambda|^k \cdot \|e^0\|_2 = \|e^0\|_2$$



(iii) $|\lambda| > 1 \Rightarrow e^k = \lambda^k e^0$

$$\|e^k\|_2 = |\lambda|^k \|e^0\|_2 \xrightarrow[k]{} +\infty$$

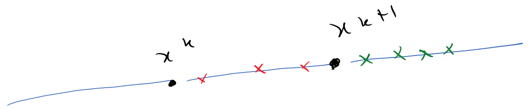
$\Rightarrow$ no converge!



Ejercicio 17 (Divergencia del método SOR). Demostrar que $\det(Q_{SOR}) = (1-\omega)^n$ y deducir que el método SOR solamente puede ser convergente si ω está en el intervalo $(0,2)$.

$$Q_{SOR} := (D-\omega E)^{-1}\left((1-\omega)D + \omega F\right), \quad \mathbf{r}_{SOR} := \omega(D-\omega E)^{-1}\mathbf{b}.$$

$$x^{k+1} = g(x^k)$$



$$\tilde{x}^{k+1} = \omega x^{k+1} + (1-\omega)x^k$$

$$\det(Q_{SOR}) = \det\left((D-\omega E)^{-1}\left((1-\omega)D + \omega F\right)\right) \qquad \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

$$= \frac{\det\left(\overbrace{(1-\omega)D + \omega F}^{\text{triangular sup.}}\right)}{\det\left(\underbrace{D-\omega E}_{\text{trian. inf.}}\right)} = \frac{\det\left((1-\omega)D\right)}{\det(D)} \overset{\uparrow}{=} (1-\omega)^n \frac{\cancel{\det(D)}}{\cancel{\det(D)}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } A \in M_n(\mathbb{R}) \\ \chi_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n - (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + \dots + \underline{\det A}\end{array}}$$

fórmulas de Vietta.

$$p(x) = a_0(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_m) = a_0x^m + \dots + \underbrace{a_0\prod_i \alpha_i}$$

para $\chi_{Q_{SOR}}(\lambda)$, $a_0 = 1$ $\Rightarrow$ $|\det A| = \left|\prod_i \alpha_i\right| = \prod_i |\alpha_i|$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \rho(Q_{SOR}) < 1 \Rightarrow \max_i |\lambda_i| < 1 \\ \Rightarrow \prod_i |\lambda_i| < 1 \\ \Rightarrow |\det A| < 1 \\ \Rightarrow \boxed{|(1-\omega)^n| < 1} \end{array}\right\} \text{ Queremos que converja!!}$$

$$\Rightarrow |1-\omega| < 1 \Rightarrow \omega \in (0,2)$$