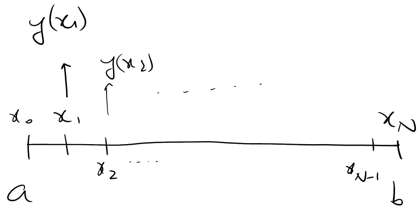
Ejercicio 7 (Resolución de ecuaciones diferenciales). Consideremos el siguiente problema: hallar $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} y''(x) + g(x)y(x) = f(x) & \text{para } x \in (a,b) \\ y(a) = \alpha, \ y(b) = \beta, \end{cases} \tag{E}$$

donde $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ son funciones conocidas. Se desea hallar una aproximación numérica de la solución de (E).



a) Dividir al intervalo $[a,b]$ en N subintervalos de largo $h = \frac{b-a}{N}$ y tomar como incógnitas los valores de y en los puntos de subdivisión interiores a $[a,b]$. Éstos son de la forma $y_i = y(x_i)$, $i = 1, \ldots, N-1$, con

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, N.$$

En los extremos del intervalo $x_0 = a$ y $x_N = b$ la función y es conocida: $y_0 = y(x_0) = y(a) = \alpha$ e $y_N = y(x_N) = y(b) = \beta$.

$\alpha = y(a) = y(x_0) \longrightarrow$ valor dado

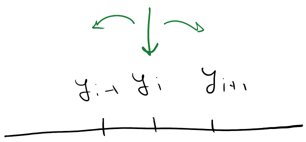
$\beta = y(b) = y(x_N) \longrightarrow$ valor dado

$y(x_i) = y_i \longrightarrow$ incógnitas para $i = 1, \ldots, N-1$

b) Para $i = 1, \ldots, N-1$ considerar la aproximación

$$y''(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Usando desarrollos de Taylor alrededor de x_i, y asumiendo que la función y es tan regular como sea necesario, mostrar que el error de aproximación es $\mathcal{O}(h^2)$.



$$y''(x_i) \simeq \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Ejemplo

$$\left.\begin{aligned} y'(x_i) &\sim \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \\ y'(x_{i+1}) &\sim \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h} \end{aligned}\right\} \quad y''(x_i) \simeq \frac{y'(x_{i+1}) - y'(x_i)}{h}$$

$$\simeq \frac{(y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i)}{h^2} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}$$

Solución

$$\boxed{y_{i+1}} \overset{\text{def}}{=} y(x_{i+1}) \overset{\text{def}}{=} y(x_i + h) = y(x_i) + h\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + O(h^4)$$

$$\boxed{y_{i-1}} = y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - h\, y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + O(h^4)$$

$$\left[y''(x_i)\right]_{\text{Numérica}} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Acordarse: $y_i = y(x_i)$

Sustituimos

$$= \Big\{ + \Big[\cancel{y(x_i)} + h\, \cancel{y'(x_i)} + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \frac{h^3}{\cancel{3!}} \cancel{y'''(x_i)} + O(h^4)\Big]$$
$$- \cancel{2}y_i$$
$$+ \Big[\cancel{y(x_i)} - h\, \cancel{y'(x_i)} + \frac{h^2}{2} y''(x_i) - \frac{h^3}{\cancel{3!}} \cancel{y'''(x_i)} + O(h^4)\Big] \Big\} \frac{1}{h^2}$$

$$= \frac{h^2 y''(x_i) + O(h^4)}{h^2} = y''(x_i) + O(h^2) \checkmark$$

c) Imponer la ecuación (E) en cada uno de los puntos x_i para $i = 1, \ldots, N-1$ y obtener un sistema lineal de ecuaciones

$$y_{i-1} + (g_i h^2 - 2) y_i + y_{i+1} = f_i h^2, \quad i = 1, \ldots, N-1$$

donde $f_i = f(x_i)$ y $g_i = g(x_i)$ para $i = 1, \ldots, N-1$, y además $y_0 = \alpha$, $y_N = \beta$.

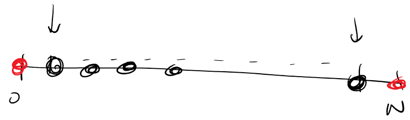
$$y'' + y g = f \quad \to \text{ en el intervalo.}$$

En cada punto x_i, $i = 1, \ldots, N-1$:

$$\left\{ y''(x_i) + y_i g_i = f_i \right.$$

Sustituyo por la derivada numérica.

$$\Rightarrow \left\{ \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + g_i = f_i \right.$$



$$\Rightarrow \left\{ y_{i+1} + (g_i h^2 - 2) y_i + y_{i-1} = f_i \cdot h^2 \right. \qquad \forall\ i = 1, \ldots, N-1$$

Supongamos que $N = 4$

$$\begin{cases} y_0 + (g_1 h^2 - 2)\boxed{y_1} + \boxed{y_2} = f_1 h^2 \\ \boxed{y_1} + (g_2 h^2 - 2)\boxed{y_2} + \boxed{y_3} = f_2 h^2 \\ \boxed{y_2} + (g_3 h^2 - 2)\boxed{y_3} + y_4 = f_3 h^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} g_1 h^2 - 2 & 1 & 0 \\ 1 & g_2 h^2 - 2 & 1 \\ 0 & 1 & g_3 h^2 - 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 h^2 - y_0 \\ f_2 h^2 \\ f_3 h^2 - y_4 \end{pmatrix}}_{b}$$

d) Escribir el sistema anterior en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con A de dimensiones $(N-1) \times (N-1)$, y $\mathbf{x}, \mathbf{b}$ de dimensiones $(N-1) \times 1$. Resolver en Octave el problema (E) con

$$a = 0, \quad b = 5, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \text{sen}(5), \quad f(x) = \text{sen}(x)(e^x - 1), \quad g(x) = e^x.$$

e) Para $N = 50$, graficar el resultado obtenido y compararlo con la solución exacta $y(x) = \text{sen}(x)$.

Ejercicio 8 (Algoritmo de Thomas). Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ tridiagonal, es decir, $a_{ij} = 0$ si $|i-j| > 1$. Se tiene la siguiente descomposición LU de A:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}} = \overset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & l_3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_n & 1 \end{bmatrix}} \times \overset{U}{\begin{bmatrix} c_1 & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & u_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & u_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_n \end{bmatrix}}. =$$

$$\begin{pmatrix} c_1 & u_1 & 0 & 0 \\ c_1 l_2 & u_1 l_2 + c_2 & u_2 & 0 \\ 0 & c_2 l_3 & u_2 l_3 + c_3 & u_3 & \ddots \\ 0 & 0 & c_3 l_4 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que $\boxed{u_k = a_{kk+1}}$ para $k = 1, \ldots, n-1$ y calcular fórmulas para las entradas l_k, $k = 2, \ldots, n$ de L y para c_k, $k = 1, \ldots, n$ de U en función de las entradas a_{ij} de A.

b) Escribir un programa `x = tridiagonal(A,b)` que resuelva el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para una matriz tridiagonal. Notar que, usando los resultados obtenidos en la parte anterior, se puede hallar una descomposición LU de forma eficiente. Este método suele ser llamado *algoritmo de Thomas*.

c) Usar el algoritmo de Thomas para resolver, como en el Ejercicio 7, la ecuación diferencial

$$y''(x) = -1{,}5\,y(x) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad t \in [0,1], \quad y(0) = y(1) = 1.$$

Comparar la solución de la ecuación diferencial con las aproximaciones obtenidas usando diferentes valores de h (por ejemplo $h = 10^{-k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$).

$$u_i = a_{i\,i+1} \qquad \forall i = 1 \ldots n-1$$

$$c_1 = a_{11}$$

$$\begin{cases} u_{i-1}\,\underline{l_i} + \underline{c_i} \overset{(\ast\ast)}{=} a_{ii} & \forall i = 2, \ldots, n \\ \underline{c_{i-1}}\,\underline{l_i} \overset{(\ast)}{=} a_{i\,i-1} & \forall i = 2, \ldots, n \end{cases}$$

Si A es no singular $\Rightarrow$ $\det U \neq 0$ $\Rightarrow$ c_i's no son nulos

$$l_i \overset{(\ast)}{=} \frac{a_{i-1\,i}}{c_{i-1}} \qquad \forall i = 2, \ldots, n$$

$a_{i-1\,i}$

$a_{i\,i-1}$ — a_{ii}

$$c_i \overset{(\ast\ast)}{=} a_{ii} - a_{i-1\,i} \cdot \frac{a_{i\,i-1}}{c_{i-1}}$$

c) $$y'' + \frac{3}{2}y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad x \in [0,1], \quad y(0) = y(1) = 1$$

Homogénea: $y'' + 3/2\, y = 0 \rightarrow \quad \lambda^2 + 3/2 = 0 \rightarrow A_0 \operatorname{sen}(\sqrt{3/2}\,x) + B_0 \cos(\sqrt{3/2}\,x)$

Particular: $A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

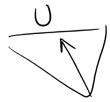
Solución exacta:

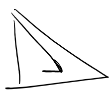
$$y(x) = \left(\frac{\frac{\pi^2 - 2}{\pi^2 - 6} - \cos(\sqrt{3/2})}{\operatorname{sen}\sqrt{3/2}}\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{3/2}\,x\right) + \cos\left(\sqrt{3/2}\,x\right) - \frac{4}{\pi^2 - 6}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$Ay = b$$

$$\underbrace{LUy}_{z} = b$$

U





L

$Lz = b \longrightarrow$ resuelvo con "adelante".

$Uy = z \longrightarrow$ " " "atrás"

d) Demostrar que el costo computacional de usar el algoritmo de Thomas para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tridiagonal es $\mathcal{O}(n)$.

$$Lz=b \quad \begin{cases} \boxed{z_1 \qquad\qquad\qquad\qquad = b_1} \\ l_2 z_1 + z_2 \qquad\qquad = b_2 \\ \qquad l_3 z_2 + z_3 \qquad = b_3 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 , & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \end{matrix}\right\} \; n-1 \to 2n-2. \;\rightsquigarrow\; O(2n)$$

$Uy = z \;\rightsquigarrow\; O(2n) \quad \Rightarrow \quad$ Resolver el sistema tiene orden $O(4n)$.

Ejercicio 9 (Descomposición de Cholesky). El algoritmo de Cholesky permite factorizar matrices simétricas definidas positivas de forma eficiente.

Recordemos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es *simétrica* si $A = A^t$ y es *definida positiva* si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

- la forma cuadrática $\mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ es positiva para todo vector $\mathbf{x}$ no nulo;
- todos los valores propios de A son positivos;
- existe una matriz $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangular superior tal que $A = R^t R$. Esta es la llamada descomposición de Cholesky.

Usando la última condición arriba e igualando los elementos en la fórmula $A = R^t R$, obtenemos

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i} r_{ki} r_{kj}, \quad i \leq j.$$

Usar estas ecuaciones en un orden adecuado para computar los elementos de R de forma eficiente.

Teorema Espectral

A simétrica $\Rightarrow \exists\, Q$ matriz ortogonal tal que

$Q^{-1} A Q = D$

matriz diagonal de valores propios de A.

$\exists\ \triangledown$ tal que

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = R^t R = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 & \cdots \\ r_{12} & r_{22} & 0 & \cdots \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & \cdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_{11}^2 & \otimes & \otimes & \cdots \\ (r_{12} r_{11}) & (r_{12}^2 + r_{22}^2) & \otimes & \\ (r_{13} r_{11}) & (r_{13} r_{12} + r_{23} r_{22}) & (r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

1 flop/fila → 1.

3 flops/fila → $3(n-1)$

5 flop/fila → $5(n-2)$

$2k-1$ flops/fila → $(2k-1)(n-k+1)$

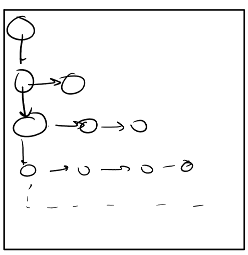
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (2k-1)(n-k+1)$ → total de flops

$\boxed{r_{11}^2 = a_{11}}$

$r_{12} r_{11} = a_{21} \rightarrow \boxed{r_{12}}$

$r_{12}^2 + r_{22}^2 = a_{22} \rightarrow \boxed{r_{22}}$

$r_{13} r_{11} = a_{31} \rightarrow r_{13}$



Cholesky $\sim O\left(\frac{1}{3} n^3\right)$ $<$ $O\left(\frac{2n^3}{3}\right)$

Ejercicio 10 (Número de condición de matriz diagonal). Sea $D = \text{diag}\,(d_1, \cdots, d_n)$ una matriz diagonal con elementos $\{d_i\}_{i=1}^n$. Sea $\|\cdot\|$ la norma matricial asociada a alguna de las normas vectoriales $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ o $\|\cdot\|_\infty$. Demostrar que

$$\|D\| = \max_{1\leq i\leq n} |d_i|.$$

Suponiendo que D es no singular, determinar $\|D^{-1}\|$ y hallar una expresión para el número de condición $\kappa(D)$.

$D = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n)$

Repaso:

$$\|A\|_\infty = \max_{\text{filas}} (\text{norma 1 de filas})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max_{\text{colum.}} (\text{norma 1 de columnas})$$

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$, λ_1 mayor valor propio de A^tA.

Si tenemos matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

norma 1 de primera fila = norma 1 de primera columna.

" " " segunda fila = " " " segunda columna.

$\cdots$

$$\Rightarrow \quad \|D\|_1 = \|D\|_\infty = \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right)$$

$$= \max_j (|d_j|) = \text{mayor elemento de la diagonal en v.a.}$$

$$D^tD = D^2 = \text{diag}(d_1^2, d_2^2, \ldots, d_n^2)$$

El mayor valor propio de D^2, $d_{i_0}^2$, cumple que

$$\sqrt{d_{i_0}^2} = |d_{i_0}| = \max_j |d_j|$$

$$\Rightarrow \quad \|D\|_2 = \|D\|_\infty \quad \checkmark.$$

Si D es no singular, $D^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1})$

$$\boxed{\kappa(D)} = \|D\| \cdot \|D^{-1}\|$$

$$= \max_i |d_i| \cdot \max_i |d_i|^{-1} = \boxed{\frac{\max |d_i|}{\min |d_i|}}$$