Práctico 2

Escalerización:

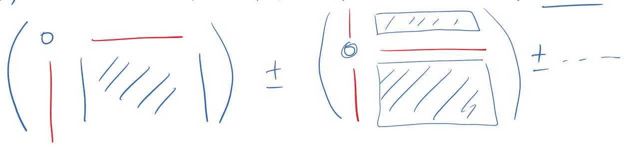
⊗ $$\underbrace{\begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \ddots & \\ \ast & & \ddots \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{b_1}{L_{11}} \\ x_2 = \dfrac{b_2 - x_1 L_{21}}{L_{22}} \\ \vdots \end{array}$$

$\mathcal{O}(n^2)$ flops

⊗ $$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \longrightarrow$$ se escaleriza A y luego se resuelve. $\mathcal{O}\left(\frac{2n^3}{3}\right)$ flops.

⊗ Método de Cramer: $$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & a_{12} & \cdots \\ \vdots & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ x_n & a_{n2} & \cdots \end{pmatrix}$$

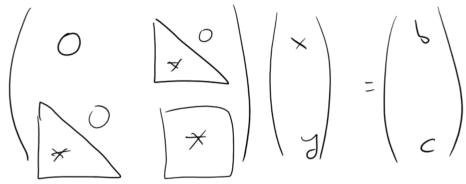
$$\mathcal{O}(\det M_{n\times n}) = n\, \mathcal{O}(\det M_{(n-1)\times(n-1)}) = \mathcal{O}(n!) \text{ flops}$$



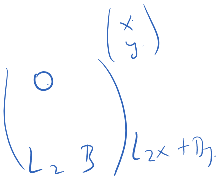
Ejercicio 1 (Un sistema esencialmente triangular inferior). Explicar cómo resolver de forma eficiente un sistema lineal de la forma

$$\overbrace{\begin{bmatrix} O & L_1 \\ L_2 & B \end{bmatrix}}^{2n} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

donde L_1 y L_2 son matrices triangulares inferiores y no singulares, O es la matriz nula, B es una matriz arbitraria, y los vectores están particionados acordemente. Describir los pasos necesarios en términos de las submatrices y vectores dados.



Solución:



$$\boxed{L_1 y = b} \longrightarrow O(n^2)$$

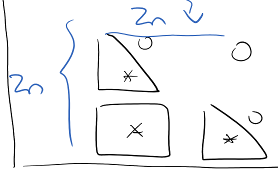
$$L_2 x + By = c$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{L_2 x = c - \underbrace{By}_{O(2n^2)}} \longrightarrow O(n^2)$$

$\Rightarrow$ Costo final: $O(4n^2)$ flops.

"Si se pudiera reordenar con costo 0."



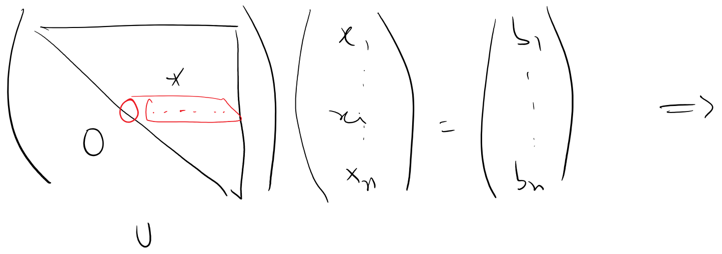
$\longrightarrow O(4n^2)$

$\overbrace{n \text{ productos y } n-1 \text{ suma}}^{2n-1}$

$\Rightarrow 2n^2$ operaciones

$O(2n^2)$ flops.

Ejercicio 2 (Sustitución hacia atrás). Escribir una función `x = atras(U,b)` que tome como entradas una matriz triangular superior U y un vector columna $\mathbf{b}$, y resuelva el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mediante sustitución hacia atrás.



$$U_{nn} x_n = b_n \rightarrow x_n = \frac{b_n}{U_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} x_j U_{ij}}{U_{ii}} \quad \neq 0.$$

Ejercicio 3 (Cómputo de determinantes)**.** La factorización $PA = LU$ se puede utilizar para computar el determinante de A. Tenemos $\det(L)\det(U) = \det(P)\det(A)$. Como L es triangular y tiene unos en la diagonal, $\det(L) = 1$. Al ser U triangular, $\det(U) = u_{11}u_{22}\dots u_{nn}$. Como P es de permutaciones, $\det(P) = +1$ si la cantidad de intercambios es par y $\det(P) = -1$ si es impar. Por lo tanto,

$$\det(A) = \pm u_{11}u_{22}\dots u_{nn}.$$

Modificar la función `lutx` de modo que retorne cuatro variables.

```
function [L,U,p,sig] = lutx_modificada(A)
% LU Triangular factorization
% [L,U,p,sig] = lutx(A) computa una matriz triangular inferior L,
% una matriz triangular superior U, un vector de permutaciones p y
% un escalar sig, de forma que L*U = A(p,:) y sig = +1 o -1 si p
% es una permutacion par o impar.
```

Escribir una función `determinante(A)` que use la función `lutx_modificada` para calcular el determinante de A. El producto $u_{11}u_{22}\dots u_{nn}$ se puede calcular usando la expresión `prod(diag(U))`.

$$\begin{array}{l}
a_{11} \; - \; - \; - \; - \; - \\
\quad a_{22} \; - \; - \; - \; - \\
\qquad \ddots \\
\qquad\quad a_{kk} \; - \; - \; - \; - \\
\qquad\quad a_{k+1\,k} \; - \; - \; - \\
\qquad\quad \vdots \\
\qquad\quad a_{mk} \\
\qquad\quad a_{nk} \; - \; - \; - \; -
\end{array}$$

Permutaciones

$$\left.\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right\} (1\,3)(2\,4)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

$$\underbrace{(1\,5\,4\,7)}(2\,6)$$

Dada una permutación σ

el signo de σ es

$$(-1)^{\#\{\text{trasposiciones que forman } \sigma\}}.$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$(x_1\, x_4)(x_1\, x_3)(x_1\, x_2)$$

Ejercicio 4 (Cómputo de inversas). La inversa de una matriz A se puede definir como la matriz X cuyas columnas $\mathbf{x}_j$ resuelven las ecuaciones

$$A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j,$$

donde $\mathbf{e}_j$ es la j-ésima columna de la matriz identidad.

a) Tomando como punto de partida la función `bslashtx`, escribir una función `X = inversa(A)` que compute la inversa de A. Dicha función debe llamar a `lutx` solamente una vez y no debe usar ni las funciones `inv` ni `\` (backslash).

b) Comparar los resultados obtenidos con esta función con las inversas obtenidas utilizando la función `inv(A)` en algunas matrices.

(A^{-1})

$(A)(\cdots) = I$

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \to A^{-1}$

$A \leftarrow \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \cdots \\ \text{---} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{matrix}$

$\left(A \,\middle\|\, \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \right)$

$\left(\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \,\middle\|\, A^{-1} \right)$

$A x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots$

$Ax = b = e_1, e_2, \ldots \qquad [L, U, P] = lu(A)$

$$\underbrace{PA}_{\shortparallel} x = Pb$$

$$(LU)x = Pb$$

$$L(\underbrace{Ux}_{y}) = Pb$$

- Primero:

$Ly = Pb$

Resuelvo.

- Segundo:

$Ux = y$.

Resuelvo

P matriz de permutación.

Ej.:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Pb = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\downarrow} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$[2\ 3\ 1] \longleftrightarrow (3\ 2\ 1)$

vector — permutación.

flechas

$1 \to 3$

$2 \to 1$

$3 \to 2$

permutación

$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}}$

$(3\ 2\ 1)$

ciclos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow [1\ 3\ 2] \longleftrightarrow (2\ 3) = (3\ 2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow [2\ 1\ 4\ 3] \leftrightarrow (1\,2)(3\,4)$$

Ejercicio 6 (Fórmula de actualización de la inversa). Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ invertible, considerar la matriz $B = A - \mathbf{u}\mathbf{v}^t$, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son columnas de n elementos.

a) Probar que si B es invertible entonces su inversa es

$$B^{-1} = A^{-1} + \alpha(A^{-1}\mathbf{u})(\mathbf{v}^t A^{-1})$$

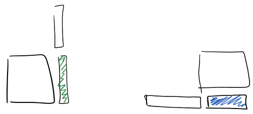
para un escalar adecuado α que se determinará.
[Sugerencia: $\mathbf{v}^t A^{-1}\mathbf{u}$ es un número distinto de 1.]

b) Aplicar la fórmula anterior para corregir la inversa de A cuando se efectúa un cambio en una de sus columnas. Para ello seguir estos pasos:

- Definir una matriz A de 6×6 y hallar su inversa con el comando `inv`.
- Definir una matriz B igual a A excepto en su columna 4, que será de unos.
- Elegir vectores columna $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de forma que $B = A - \mathbf{u}\mathbf{v}^t$.
- Usar la fórmula anterior para hallar B^{-1} y verificar el resultado.

$$A \times B = C$$
$$(n\times k)\,(k \times m) \qquad n\times m$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1 \cdots v_n) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n v_1 & \cdots & u_n v_n \end{pmatrix}$$



Propiedad Asociativa.

$$(A \times B)\times C = A \times (B \times C)$$

Propiedad Conmutativa no vale.

$$A \times B \neq B \times A$$

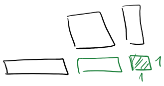
pero si B es un escalar

$$\Rightarrow AB = BA$$

$$I = B\cdot B^{-1} = (A - uv^t)\left(A^{-1} + \alpha\left(A^{-1}u\right)\left(v^t A^{-1}\right)\right)$$

$$= AA^{-1} - uv^t A^{-1} + \alpha A(A^{-1}u)(v^t A^{-1}) - \alpha uv^t(A^{-1}u)(v^t A^{-1})$$

$$= I - uv^t A^{-1} + \alpha (AA^{-1})\, uv^t A^{-1} - \alpha u\underbrace{(v^t A^{-1}u)}\, v^t A^{-1}$$



$$= I + \underbrace{\left(-1 + \alpha - \alpha\left(v^t A^{-1}u\right)\right)}_{\equiv 0} uv^t A^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{Si } B \text{ es invertible}, \quad \alpha = \frac{1}{1 - v^t A^{-1}u}$$