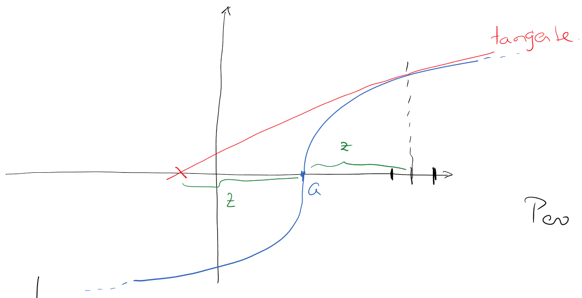
Ejercicio 4 (Secante en un caso difícil). Investigar el comportamiento del método de la secante para la función

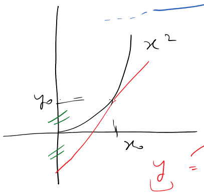
$$f(x) = \mathrm{sg}(x-a)\sqrt{|x-a|}, \quad a \in \mathbb{R}.$$



Teorema (teórico)

Si f es C^2, entonces $\exists\, I \subset \mathbb{R}$ con $x^* \in I$ t.q. el método converge.

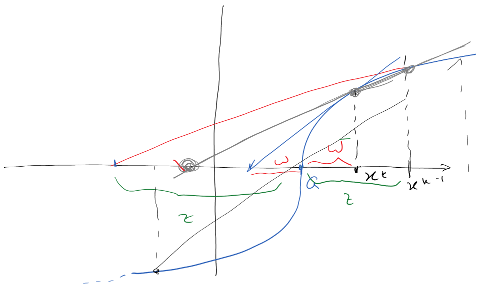
Pero $f(x)$ no es derivable en $\underline{\underline{a}}$!!



$x_0) + y_0$

en la intersección con el eje y.

$$\underbrace{y} = \underbrace{f'(x_0)}_{2x_0}(-x_0) + \underbrace{y_0}_{x_0^2} \longrightarrow \boxed{y = -x_0^2}$$



(i) Si x^k, x^{k-1} están del mismo lado respecto a la recta $x = a$

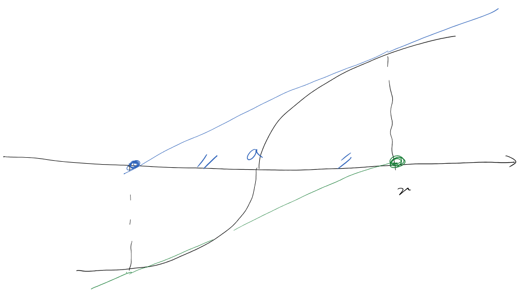
$\Rightarrow |x^{k+1} - a| < \text{máx}\{|x^k - a|, |x^{k-1} - a|\}$

(ii) Si $(x^k - a)(x^{k-1} - a) < 0$

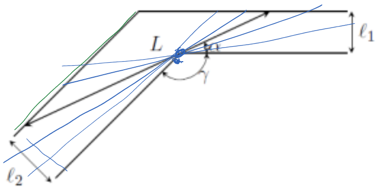
$\Rightarrow |x^{k+1} - a| < \text{máx}\{|x^k - a|, |x^{k-1} - a|\}$

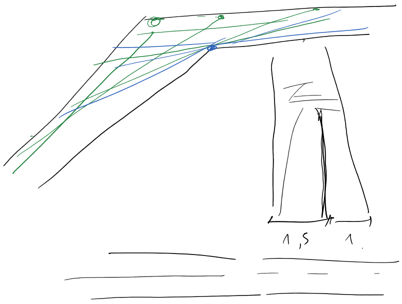
$\Rightarrow$ el método de la secante converge !!

Ahora bien, ¿sirve el método de Newton?



Ejercicio 5 (Pasar un pizarrón por un pasillo). Un pasillo tiene la forma que se muestra en la siguiente figura.





El largo máximo L de un pizarrón que pasa por el pasillo está dado por

$$L = \frac{\ell_2}{\operatorname{sen}(\pi-\gamma-\alpha)} + \frac{\ell_1}{\operatorname{sen}(\alpha)},$$

donde α es la solución de la ecuación

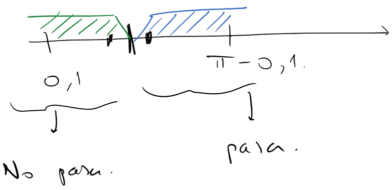
$$\frac{\ell_2 \cos(\pi-\gamma-\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\pi-\gamma-\alpha)} - \frac{\ell_1\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)} = 0. \longrightarrow f(\alpha)$$

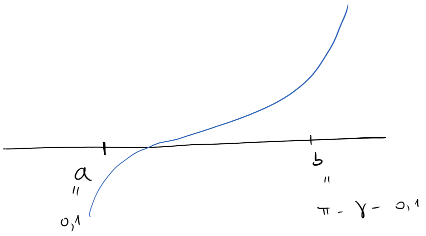
a) Calcular el largo máximo de pizarrón que pasa por un pasillo en el que $\ell_1 = 1$m, $\ell_2 = 1{,}5$m, y $\gamma = 3\pi/5$.

b) Se tiene un pasillo con $\ell_1 = 1$m, $\ell_2 = 1{,}5$m, y un pizarrón de $5m$ de largo. Determinar el valor mínimo de $\gamma \le \pi$ que permite que el pizarrón pueda girar en el pasillo.

c) Se sabe que uno de los dos pasillos tiene el doble de ancho que el otro, que el codo es $\gamma = \pi/2$, y que un pizarrón de $3m$ de largo pasa justo. ¿Qué ancho tienen los pasillos?

γ's :





Anidamos un buscador de raíces dentro de un método de Bisección para γ.

$\gamma_i = 0{,}1$

$\gamma_d = \pi - 0{,}1$.

[. . .]

while $(j_{max} > j)$ && $(\gamma_d - \gamma_i > eps.)$

$\gamma_m = \gamma_i + \frac{\gamma_d - \gamma_i}{2}$

Calculo la raíz con el método de la parte a).

→ Si hay raíz

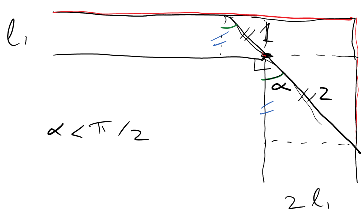
$\gamma_d = \gamma_m$

→ Si no hay raíz

$\gamma_i = \gamma_m$.

end.

c)



$\alpha \rightarrow \ldots$

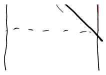
$\cos(\pi - \alpha - \gamma)$
$\quad \shortparallel$
$\operatorname{sen}(\alpha + \gamma) \ldots$

$\gamma = \pi/2$

$$\frac{\ell_2 \cos(\pi-\boxed{\gamma}-\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\pi-\boxed{\gamma}-\alpha)} - \frac{\ell_1\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)} = 0.$$

$\cos(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$

$\alpha < \pi/2$



$2\ell_1$

$$\frac{\ell_2 \cos(\pi - \boxed{\gamma} - \alpha)}{\mathrm{sen}^2(\pi - \boxed{\gamma} - \alpha)} - \frac{\ell_1 \cos(\alpha)}{\mathrm{sen}^2(\alpha)} = 0.$$

$\pi/2$

$$\cos(\pi/2 - \alpha) = \mathrm{sen}(\alpha)$$
$$\mathrm{sen}(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$2\ell_1 \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha} - \ell_1 \frac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}^2\alpha} = 0 \rightarrow \ell_1\left(2\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}^2\alpha} = 0\right) \quad (*)$$

$$L = \frac{\ell_2}{\mathrm{sen}(\pi - \gamma - \alpha)} + \frac{\ell_1}{\mathrm{sen}(\alpha)},$$

$$3 = \frac{2\ell_1}{\cos\alpha} + \frac{\ell_1}{\mathrm{sen}\,\alpha} \rightarrow \frac{3}{\ell_1} = \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha}.$$

$$(*) \quad \frac{2\,\mathrm{sen}^3\alpha - \cos^3\alpha}{\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha} = 0. \rightarrow 2\,\mathrm{sen}^3\alpha - \cos^3\alpha = 0$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cos\alpha.$$

$$\alpha = \mathrm{atan}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$$

Ejercicio 6 (Interpolación). La siguiente es una tabla de la distancia d que un vehículo requiere para detenerse si se lo frena cuando está viajando a una velocidad v.

v (m/s)	0	10	20	30	40	50	60
d (m)	0	5	20	46	70	102	153

Buscamos determinar cuál es la velocidad límite para este vehículo si tiene que detenerse en a lo sumo 60 m. Computar esta velocidad de tres formas distintas:

1. usando interpolación lineal a trozos;
2. usando interpolación cúbica a trozos con `pchiptx`;
3. usando interpolación con splines cúbicas con `splinetx`.

Analizamos los datos primero: Distancia de frenado. (MRUA).

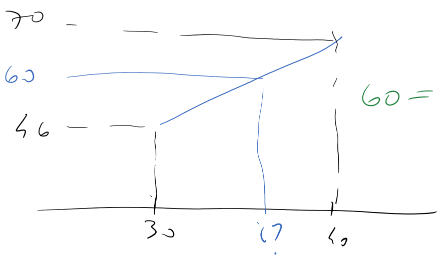
$$\frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x} = a.$$

$$v_f = 0, \Rightarrow |\Delta x| = \left|\frac{v_i^2}{2a}\right|$$

$$\Rightarrow \boxed{d \propto v^2}$$

$\Rightarrow$ Como $d(v)$ es creciente, nos concentramos en el intervalo $[30, 40]$

a)



$$60 = \boxed{d} = \boxed{\overbrace{\frac{\Delta d}{\Delta v}}^{24/10}}(v - \underbrace{v_0}_{30}) + \underbrace{d_0}_{46}$$

$$\frac{(60-46)}{24/10} + 30 = v$$

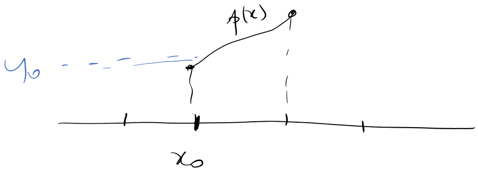
$$\Rightarrow \frac{14 \cdot 10}{24} + 30 = v \rightarrow v = 35 + 5/6$$

b, c)

Spline $(x, y) \rightarrow$ da x polinómica ....

Cada polinomio de spline se escribe de la forma

$$p(x) = a(x-x_0)^3 + b(x-x_0)^2 + c(x-x_0) + \underbrace{d}_{y_0}$$

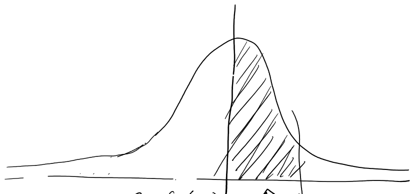


Ejercicio 7 (Instalar una tubería). Se quiere instalar una tubería en una región muy fría, por lo que es fundamental evitar el congelamiento del agua. Asumiendo condiciones uniformes en el suelo, la temperatura $T(x,t)$ a una distancia x bajo tierra después de t unidades de tiempo de comenzada una ola de frío está dada por

$$\frac{T(x,t)-T_s}{T_i-T_s}=\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right).$$

Aquí, T_s es la temperatura (asumida constante) del suelo, T_i es la temperatura inicial de la cañería al comienzo de la ola de frío, y α es la conductividad térmica del suelo. La función error erf puede ser utilizada en Octave con el comando `erf`.

Tomaremos los valores $\alpha = 0{,}138 \times 10^{-6} m^2/s$, $T_i = 20°C$, $T_s = -15°C$. Determinar qué tan profundo se debe enterrar una tubería de modo que pueda resistir al menos 60 días de exposición a estas condiciones, esto es, hallar el menor x^* tal que $T(x^*,t) \geq 0$ para todo $t \in [0, 5{,}184 \times 10^6]$ (notar que 60 días equivalen a 5184000 segundos).

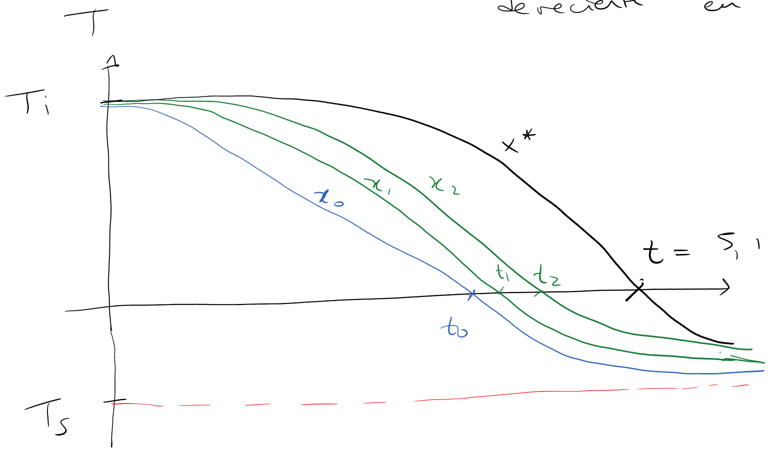


$$\underbrace{\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x} e^{-t^2}\,dt.}$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \to +\infty.$$

$$T(x,t) = (T_i - T_s)\,\overbrace{\underbrace{\operatorname{erf}\left(\boxed{\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}}\right)}_{\text{fijado } x,\ \text{decreciente en } t}}^{\text{fijado } t,\ \text{creciente en } x} + T_s$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \to 0.$$



En vista de lo anterior, la sucesión de t_i en donde

$$T(x_i, t_i) = 0$$

crece.

Debemos hallar el x^* tal que

$$T(x^*, 5{,}184 \times 10^6) = 0.$$

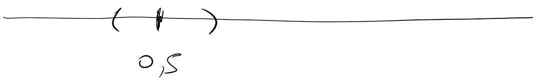
Ejercicio 8 (Iteraciones de punto fijo). Para resolver la ecuación $x + \log(x) = 0$ usando una iteración de punto fijo, se proponen las siguientes fórmulas:

$$x^{k+1} = -\log(x^k), \qquad x^{k+1} = e^{-x^k}, \qquad x^{k+1} = \frac{x^k + e^{-x^k}}{2}.$$

Si se sabe que la raíz está cerca de $x = 0{,}5$, ¿cuáles de las fórmulas anteriores se pueden usar? ¿Cuál es mejor? Experimentar con las tres fórmulas y discutir los resultados.

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \log(x) = 0 \\ e^{x} \cdot x = 1 \end{cases}$$

* ¿Es contractiva la función en un entorno de 0,5?



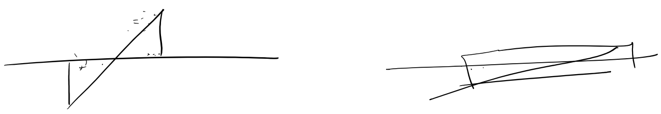
* ¿Qué tan grande es el entorno donde es contractiva?

i) $g(x) = -\log(x) \rightarrow g'(x) = -\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow |g'(1/2)| = 2 > 1 \rightarrow$ no es contractiva.

ii) $g(x) = e^{-x} \rightarrow |g'(1/2)| = \dfrac{1}{\sqrt{e}} < 1 \rightarrow$ es contractiva!

iii) $g(x) = \dfrac{x + e^{-x}}{2} \rightarrow |g'(1/2)| = \left| \dfrac{1 - 1/\sqrt{e}}{2} \right| < 1$ es contractiva!



Ejercicio 9 (Un método iterativo). El método de Newton para resolver la ecuación escalar $f(x) = 0$ requiere que evaluemos la derivada de f en cada iteración. Supongamos que reemplazamos el valor de la derivada por una constante d, esto es, usamos el método iterativo

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{d}.$$

a) Asumiendo que f es suficientemente regular, ¿bajo qué condiciones en d esta iteración es localmente convergente?

b) En general, ¿qué orden de convergencia tiene esta iteración?

c) ¿Existe un valor de d que asegure convergencia cuadrática?

d) Implementar el método en Octave y usarlo para calcular numéricamente el valor de $\log 3$ como raíz de la función $f(x) = e^x - 3$. Probar iniciando con $x^0 = 1$ y con los valores $d = 1$, $d = 2$ y $d = 3$, y verificar computacionalmente lo hallado en las partes anteriores. Para ello, para los valores de d para los que espera convergencia, computar para $k = 0, \ldots, 4$,

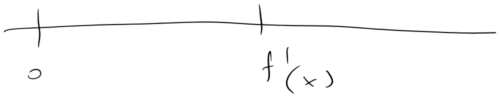
$$\frac{|e^{k+1}|}{|e^k|^p},$$

donde p es el orden de convergencia predicho.

a)

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{d}$$

$$|g'(x)| = \left|1 - \frac{f'(x)}{d}\right| < 1 \longrightarrow |d - f'(x)| < |d|$$



Ejercicio 10 (Método de Steffensen). Dados $x^0 \in \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ consideramos, para $k \geq 0$, la siguiente iteración para hallar raíces de f:

$$x^{k+1} := x^k - \frac{f(x^k)}{\phi(x^k)}, \quad \phi(x^k) := \frac{f(x^k + \overbrace{\boxed{f(x^k)}}^{h}) - f(x^k)}{\underbrace{\boxed{f(x^k)}}_{h}}. \quad = \quad \frac{f(x^k + h^k) - f(x^k)}{h^k} \rightsquigarrow \text{cociente incremental}$$

A esta iteración se la conoce como el *método de Steffensen*.

a) Demostrar que el método de Steffensen es de segundo orden.

b) Sea la función

$$f(x) = e^{-x}\cos(x) - \sqrt{x} + 3\,\mathrm{sen}(x).$$

Graficarla y comprobar visualmente que tiene tres raíces en el intervalo $[0, 10]$. Implementar el método de Steffensen en Octave y, eligiendo iterados iniciales adecuados, usarlo para aproximar las tres raíces.

a)

Teorema 4.7.4 (orden y velocidad de convergencia). *Sea g de clase C^r, y supongamos que la sucesión $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ generada por* (MIG) *converge a x^*, siendo x^* punto fijo de g. Entonces, x^k converge a x^* con orden $p \leq r$ y velocidad $\frac{|g^{(p)}(x^*)|}{p!}$, si y solo si $g^{(i)}(x^*) = 0$ para $i = 1, \ldots, p-1$ y $g^{(p)}(x^*) \neq 0$.*

Si queremos que $p = 2$, entonces debemos demostrar que

$$\boxed{g'(x^*) = 0}$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{\left(\frac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)}\right)} \qquad \left(\frac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)}\right) = \phi(x)$$

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{\phi(x)} + \frac{f(x)\cdot\phi'(x)}{\phi^2(x)}$$

$$\overbrace{f(x^* + \overset{=0}{f(x^*)}) - f(x^*)}^{=0}$$

Quiero calcular g' en x^*

$$\lim_{x\to x^*} \phi(x) = \lim_{x\to x^*} \frac{f(x + \overbrace{\boxed{f(x)}}^{h}) - f(x)}{\underbrace{\boxed{f(x)}}_{h}} = f'(x^*) \qquad f'(x^*)$$

$$\lim_{x\to x^*} \phi'(x) = \lim_{x\to x^*} -\frac{[f(\overbrace{x + f(x)}^{x^*}) - f(x)]\, f'(x)}{f^2(x)} + \frac{f'(\overbrace{x + f(x)}^{x^*})\cdot(1 + f'(x)) - f'(x)}{\underset{0}{f(x)}}$$

Usamos que

$$\frac{f(x + f(x))}{f(x)} \to 1\,. \; ! \qquad = 0\,.$$

Finalmente,

$$g'(x^*) = 0$$

Ejercicio 11 (Basado en examen de julio de 2013). Se desea resolver la ecuación de punto fijo $x = f(x)$, con f de clase C^2, utilizando el siguiente método:

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}, \\ x^{k+1} = x^k + a(x^k - f(x^k)). \end{cases} \qquad \text{(M)}$$

a) Hallar $a \in \mathbb{R}$ para maximizar el orden de convergencia del método (M). Asumir que existe solución $\alpha = f(\alpha)$ y además verifica $f'(\alpha) \neq 1$. En las partes siguientes se utilizará el método (M) con el valor de a hallado anteriormente.

b) Sea $f(x) = 2/x$. Hallar el mayor intervalo I tal que $\sqrt{2} \in I$ y el método converge siempre que $x_0 \in I$.

c) Sean $x^0 = 1$ y $e^k = x^k - \sqrt{2}$ el error en el paso k. Haciendo un desarrollo de Taylor para $g(x) = x + a(x - f(x))$ alrededor de $\sqrt{2}$, y usando que $2/x^3 \leq 2$ para todo $x \in [1, 2]$, probar que $|e^{k+1}| \leq (e^k)^2$ para todo k.

d) Utilizando la parte anterior, determinar una cantidad suficiente de iteraciones para asegurar un error menor que 10^{-5}.

e) Mostrar que, si en vez de un desarrollo de Taylor se usa explícitamente la definición de x^{k+1}, se mejora un poco la cota obtenida en la parte c). Específicamente, probar que $|e^{k+1}| \leq \frac{(e^k)^2}{2}$ y afinar la cota en la cantidad de iteraciones de la parte d).

$g(x) = x + a(x - f(x))$

Sea α / $\alpha = f(\alpha)$.

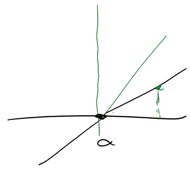
$\Rightarrow g(\alpha) = \alpha$

$f'(\alpha) \neq 1$.

a) $g'(x) = 1 + a(1 - f'(x))$

$\Rightarrow g'(\alpha) = 1 + a - af'(\alpha)$.

$g(\alpha) = \alpha$.



Queremos que g sea contractiva en un entorno de α.

Teorema 4.7.1 (de punto fijo). *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado, y sea $g\colon I \to I$ una función contractiva. Entonces, existe un único $x^* \in I$ tal que $g(x^*) = x^*$. Más aún, para todo $x^0 \in I$, si se define la sucesión $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mediante (MIG), se tiene*

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x^*.$$

$|g'(\alpha)| < 1 \rightarrow \left| 1 + \overbrace{a(1 - f'(\alpha))}^{\in(-2,\,0)} \right| < 1$

$$\begin{cases} \cancel{1} + a(1 - f'(\alpha)) < \cancel{1}\ 0 \\ -1 - a(1 - f'(\alpha)) > 1. \end{cases}$$

$a(1 - f'(\alpha)) > -2$.

Si $a \in \left(\frac{-2}{1 - f'(\alpha)}, 0\right)$ ✓.

Teorema 4.7.4 (orden y velocidad de convergencia). *Sea g de clase C^r, y supongamos que la sucesión $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ generada por (MIG) converge a x^*, siendo x^* punto fijo de g. Entonces, x^k converge a x^* con orden $p \leq r$ y velocidad $\frac{|g^{(p)}(x^*)|}{p!}$, si y solo si $g^{(i)}(x^*) = 0$ para $i = 1, \dots, p-1$ y $g^{(p)}(x^*) \neq 0$.*

$g'(\alpha) = 0 \iff 1 + a(1 - f'(\alpha)) = 0$

$\iff a = \frac{-1}{1 - f'(\alpha)}$

$g''(x) = -af''(x)$

$g''(\alpha) = -af''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{1 - f'(\alpha)}$ ¿¿

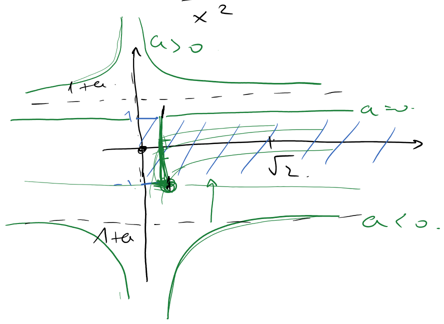
b) Queremos hallar el $I \subset \mathbb{R}$ más grande tq. $g(x)$ es contractiva y $\sqrt{2} \in I$.

$f(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow f(\sqrt{2}) = -1 \neq 1$

$$g(x) = x + a\left(x - f(x)\right)$$

$$g'(x) = 1 + a - a f'(x) = 1 + a + \frac{2a}{x^2}$$



$$|g'(x)| < 1$$

Veamos la preimagen de -1.

$$1 + a + \frac{2a}{x^2} = -1 \iff \frac{2a}{x^2} = -2 - a$$

$$\frac{2a}{-2-a} = x^2 \rightsquigarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{2a}{-2-a}}}$$

$a > -2$.

¿Cuál es el mínimo?

$a \in (-2, 0)$

$$\frac{dx}{da} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2a}{-2-a}}} \cdot \left(\frac{a}{-2-a}\right)'$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2a}{-2-a}}} \cdot \frac{(-2-a)+a}{(-2-a)^2} = \frac{-2\sqrt{2}}{\dots}$$

$\Rightarrow$ el intervalo disminuye a medida que a aumenta.

$\Rightarrow$ con el a hallado en la parte anterior,

tenemos que el intervalo es $\left(\sqrt{\frac{2a}{-2-a}}, +\infty\right)$

c)

$$g(x) = x + a(x - f(x))$$

$$g'(x) = 1 + a - a f'(x)$$

$$g'(\sqrt{2}) = 1 + 2a.$$

$$g''(x) = -a f''(x) = -a\frac{4}{x^3} \rightsquigarrow g''(\sqrt{2}) = -a\sqrt{2}$$

$$g(x^k) = g(\sqrt{2}) + g'(\sqrt{2})(x^k - \sqrt{2})$$

$$e^{k+1} = x^{k+1} - \sqrt{2}$$

$$= g(x^k) - \sqrt{2}$$

$$= \left[g(\sqrt{2}) + \overset{1+2a=0}{g'(\sqrt{2})}(x^k - \sqrt{2}) + \frac{g''(\sqrt{2})}{2}(x^k - \sqrt{2})^2 + \dots\right] - \sqrt{2}$$

$$= \left[\cancel{g(\sqrt{2})} + \frac{g''(\sqrt{2})}{2}(\underbrace{x^k - \sqrt{2}}_{e^k})^2 + \dots\right] - \cancel{\sqrt{2}}.$$

$$= \frac{g''(\sqrt{2})}{2}(e^k)^2$$