miércoles, 16 de agosto de 2023 18:04

Javier Perata (CIMAT)

Ejercicio 4 (Errores relativo y absoluto).

a) Al determinar una constante C se obtuvo el valor 92,34 con un error relativo de un 0,1 %. ¿En qué intervalo se encuentra C? ¿Cuál es el error absoluto?

b) ¿Cuántos dígitos del número $\sqrt{22}$ deben darse para determinarlo con un error relativo no mayor al 0.1 %?

c) En una medición se obtiene el valor $\overline{v} = 17261$. Se sabe que el error relativo es del 1 %. ¿Cómo debería escribirse v para reflejar este hecho?

Repaso

$$\boxed{x \in \mathbb{R}}$$

$\overline{x}$ medición ó aproximación

$$\Rightarrow \quad e_x = \overline{x} - x \qquad // \qquad \varepsilon_x \overset{\circledast}{=} \frac{\overline{x} - x}{x}$$

Cuando multiplicamos por 100, resulta el error relativo porcentual

$$\overline{x} = (1 + \varepsilon_x)\, x$$

a) $C \quad 92{,}34 \qquad \varepsilon_C = 0{,}001 \; (= 0{,}1\ \%)$

$$¿C? \quad \pm 0{,}001 = \varepsilon_C = \frac{\overline{C} - C}{C}$$

$$C \varepsilon_C = \overline{C} \underbrace{- C} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\overline{C}}{1 + \varepsilon_C}}$$

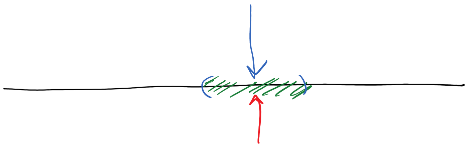
Si el error es por arriba, $C = \dfrac{\overline{C}}{1 + 0{,}001} = \underline{92{,}247...}$

" " " " " abajo $C = \dfrac{\overline{C}}{1 - 0{,}001} = \underline{92{,}432....}$

$\underline{0{,}001 \cdot 92{,}34}$

$\boxed{0{,}09234}$

$$C \in (92{,}247..;\ 92{,}432..)$$



b)

$$\sqrt{22} = 4{,}690415...$$

↑ ↑ ↑

Sol 1: Tomo

$$\frac{4 - \sqrt{22}}{\sqrt{22}} =$$

$$\frac{4{,}6 - \sqrt{22}}{\sqrt{22}} =$$

$$\boxed{\frac{4{,}69 - \sqrt{22}}{\sqrt{22}}} = ...$$

$$\frac{4{,}6904 - \sqrt{22}}{\sqrt{22}} = ... < 0{,}001 \checkmark$$

Sol 2 ↓

$\sqrt{22}$ $\sqrt{22}$ $< 0,001$ ✓

Sol 2

$$\left| \frac{\overset{\downarrow}{x} - \sqrt{22}}{\sqrt{22}} \right| < 0,001$$

$\underline{4},\underline{6}\,\underline{9}\,0000$

$$\underbrace{\sqrt{22} - \sqrt{22} \cdot 0,001}_{4,6857} < \bar{x} < \underbrace{\sqrt{22} + \sqrt{22} \cdot 0,001}_{4,6951}$$

$4,69$

c) $\bar{\sigma} = 17261$, $\varepsilon_\sigma = 0,01$ $\quad \bar{\sigma} \cdot \varepsilon_\sigma = 172,61$

$172,61$

$$\bar{\sigma} = 1,726 \times 10^4 \pm 0,017 \times 10^4$$

Ejemplo de resultado experimental

$$M = 7,2 \left(\pm \begin{matrix} 0,1 \\ 0,2 \end{matrix} \right) \left(\pm \begin{matrix} 0,2 \\ 0,01 \end{matrix} \right)$$

$$\boxed{1726\cancel{1} \pm 17\cancel{2,61}}$$

$$\boxed{\bar{\sigma}\varepsilon_\sigma = \Delta\sigma} = 172,61 = |\bar{\sigma} - \sigma|$$

$$\sigma \varepsilon_\sigma = \Delta\sigma$$

$$\boxed{\sigma = 17261 \pm 172,61}$$

$$\varepsilon_\sigma = \frac{|\bar{\sigma} - \sigma|}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{\bar{\sigma}}{1 \pm \varepsilon_\sigma} = \bar{\sigma} \pm \bar{\sigma}\varepsilon_\sigma \cdots O(\varepsilon_\sigma^2)$$

Ejercicio 5 (Errores en operaciones).

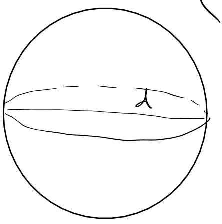
a) El diámetro interior de un tanque de agua esférico es de $\overset{\bar{d}}{1{,}5}$ ± 0,05 metros. Calcular su volumen (con el error correspondiente) aproximando $\pi \simeq 3{,}1416$.

b) Un campo rectangular mide aproximadamente 2000 por 3000 metros. ¿Con qué error deberían medirse los lados para obtener el área con un error inferior a un metro cuadrado?

$$f(x+\delta_x) = f(x) + f'(x)\,\delta_x + \cdots$$

$$\bar{d} = \underline{d + \Delta_d} = (1+\varepsilon_d)\,d$$

a)



(i)

$$V = \frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}d^3$$

$$(d+\Delta_d)^3 = d^3 + 3d^2\Delta_d + \underline{3d\Delta_d^2 + \Delta_d^3}$$

Binomio de Newton.

$$V = \frac{\pi}{6}(d+\Delta_d)^3 = \underbrace{\frac{\pi}{6}d^3}_{V_d} + \underbrace{\frac{\pi}{6}3d^2\cdot\Delta_d}_{\| \; V_d} + \cdots$$

(ii)

Binomio de Newton despreciando $O(\varepsilon_d^2)$

$$\bar{V} = \frac{\pi}{6}(1+\varepsilon_d)^3 d^3 = \frac{\pi}{6}d^3(1+3\varepsilon_d) = V_d + \underbrace{\frac{\pi d^3}{6}3\varepsilon_d}_{\Delta_{Vol}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{Vol} = \frac{\pi}{6}d^3\cdot 3\cdot\varepsilon_d.$$

$$¡\boxed{\frac{\Delta_d}{d} = \varepsilon_d}!$$

$$\boxed{\frac{\Delta_c}{\bar{c}} = \varepsilon_c}$$

$$\boxed{\frac{\Delta_{Vol}}{Vol} = \varepsilon_{Vol}}$$

$$Vol \rightarrow \frac{\pi d^3}{6}$$

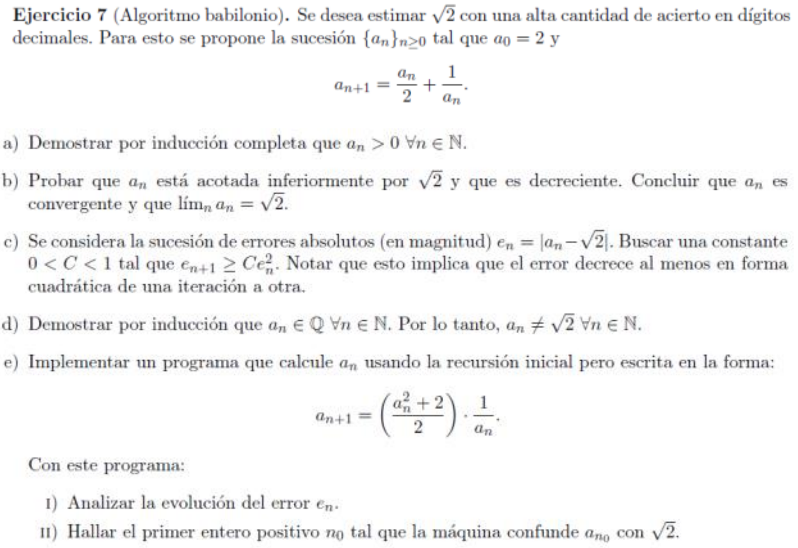
$$\| \quad 3\varepsilon_d$$

(iii)

$$\bar{\pi} = (1+\varepsilon_\pi)\,\pi$$

$$\bar{V} = \frac{\overset{\bar{x}}{\boxed{(1+\varepsilon_\pi)\pi}}}{6}\overset{\bar{y}}{\boxed{(1+\varepsilon_d)^3 d^3}} = \frac{\overset{x}{\boxed{\pi}}\overset{y}{d^3}}{6}\Big(1 + \underbrace{\overset{\varepsilon_x}{\varepsilon_\pi} + \overset{\varepsilon_y}{\boxed{3\varepsilon_d}}}_{\varepsilon_V}\Big)$$

$$\bar{x}\bar{y} = xy(1 + \underbrace{\varepsilon_x + \varepsilon_y}_{\varepsilon_{xy}})$$



Ejercicio 7 (Algoritmo babilonio). Se desea estimar $\sqrt{2}$ con una alta cantidad de acierto en dígitos decimales. Para esto se propone la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ tal que $a_0 = 2$ y

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

a) Demostrar por inducción completa que $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Probar que a_n está acotada inferiormente por $\sqrt{2}$ y que es decreciente. Concluir que a_n es convergente y que $\lim_n a_n = \sqrt{2}$.

c) Se considera la sucesión de errores absolutos (en magnitud) $e_n = |a_n - \sqrt{2}|$. Buscar una constante $0 < C < 1$ tal que $e_{n+1} \geq Ce_n^2$. Notar que esto implica que el error decrece al menos en forma cuadrática de una iteración a otra.

d) Demostrar por inducción que $a_n \in \mathbb{Q} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $a_n \neq \sqrt{2} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

e) Implementar un programa que calcule a_n usando la recursión inicial pero escrita en la forma:

$$a_{n+1} = \left(\frac{a_n^2 + 2}{2}\right) \cdot \frac{1}{a_n}.$$

Con este programa:

I) Analizar la evolución del error e_n.

II) Hallar el primer entero positivo n_0 tal que la máquina confunde a_{n_0} con $\sqrt{2}$.

a) ⊗ $a_0 = 2 > 0$

⊗ $a_n > 0$

⊗ $a_{n+1} = \overset{>0}{\frac{a_n}{2}} + \overset{>0}{\frac{1}{a_n}} > 0$ ✓

d) $a_n \in \mathbb{Q}$

⊗ $a_0 = 2 \in \mathbb{Q}$

⊗ $a_n \in \mathbb{Q}$

⊗ $a_{n+1} = \overset{\mathbb{Q}}{\boxed{\frac{a_n}{2}}} + \overset{\in \mathbb{Q}}{\boxed{\frac{1}{a_n}}}$ ✓ $\mathbb{Q}$

Como $\mathbb{Q}$ cuerpo

b) $¿a_n > \sqrt{2}?$

Si $a_n \leq a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$

$\Leftrightarrow \frac{a_n}{2} \leq \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow a_n^2 \leq 2 \Leftrightarrow a_n \leq \sqrt{2}. \ \forall n.$

$\Rightarrow$ Como $a_0 > \sqrt{2}$, ↯

Por lo tanto $\underline{a_n > a_{n+1}}$ y $\underline{a_n > \sqrt{2}}$.

$\Rightarrow$ Sucesión acotada inferiormente por $\sqrt{2}$, decreciente

$\Rightarrow$ Converge. $\lim_n a_n = \alpha \geq \sqrt{2}$

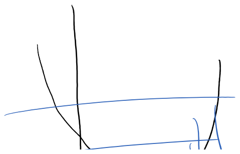
$$\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} \geq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a_n^2 + 2 \geq 2\sqrt{2}\, a_n$$

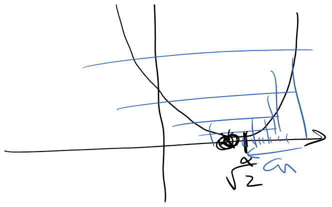
$$\Rightarrow a_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\, a_n \geq 0$$

Binomio de Newton

$$\Rightarrow \underbrace{(a_n - \sqrt{2})}^{2} \geq 0$$



de Newton $\Rightarrow \underbrace{(a_n - \sqrt{2})} \geq 0$



$\sqrt{2}$ es el supremo de la cotas inferiores.

Si $\alpha > \sqrt{2}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha > \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha} > \sqrt{2}}$

c) $e_{n+1} = |a_{n+1} - \sqrt{2}|$

$$\overset{a_{n+1} > \sqrt{2}}{=} a_{n+1} - \sqrt{2}$$

$$= \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} < a_n \leq 2$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\, a_n}{2a_n}$$

$$= \frac{\overset{e_n}{\boxed{(a_n - \sqrt{2})}}^2}{2a_n} = \frac{e_n^2}{2a_n} \geq \overset{c}{\boxed{\frac{1}{4}}} e_n^2$$

Ejercicio 8 (Cancelación catastrófica y desborde).

a) Se desea calcular numéricamente $\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+1}\log(x)\,dx$. ¿Cómo puede reescribirse dicha integral para evitar efectos de cancelación catastrófica?

b) Reescribir la expresión $\frac{e^x}{e^x+1}$ para poder evaluarla en valores grandes de x evitando efectos de desborde. $\rightarrow$

$$\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

c) Comentar los inconvenientes que pueden surgir al implementar un programa para calcular la derivada de $\cos(x)$ utilizando el cociente incremental $\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$. ¿Cómo se podría reescribir dicho cociente para aproximar esta derivada de forma más estable?

$$\cos(x+h) \simeq \dots$$

a)
$$\int_n^{n+1} \log(x)\,dx = x\log x - x \Big|_n^{n+1}$$

$$= \left[(n+1)\log(n+1) - (n+1)\right] - \left[n\log n - n\right]$$

$$= \boxed{n}\,\overbrace{\underbrace{\left(\log(n+1) - \log n\right)}_{\text{Como mucho es } 0, \pm \varepsilon_M}}^{\text{cancelación catastrófica}} + \underline{\log(n+1) - 1}$$

$n \downarrow +\infty$

$$\left(= \log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) + \log(n+1) - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{\log(e) - 1}_{=0} + \log(n+1) = +\infty.\right)$$

$$= \overbrace{n\log\left(\overbrace{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{0,\pm\varepsilon_M}}\right)}^{\to 0} + \log(n+1) - 1$$

Imaginemos: $n \sim 10^{50}$

$$\log n{+}1 - \log n \sim 10^{-15}$$

$$\Rightarrow n\left(\underbrace{\overset{\downarrow \pm\varepsilon_M}{\log(n+1)} - \overset{\downarrow \pm\varepsilon_M}{\log n}}_{\pm\varepsilon_M.}\right) = 10^{50}\cdot 10^{-15} = 10^{35}$$

$$\log(n+1) \cong 50\log(10) \ll 10^{35}.$$

10^{-15}