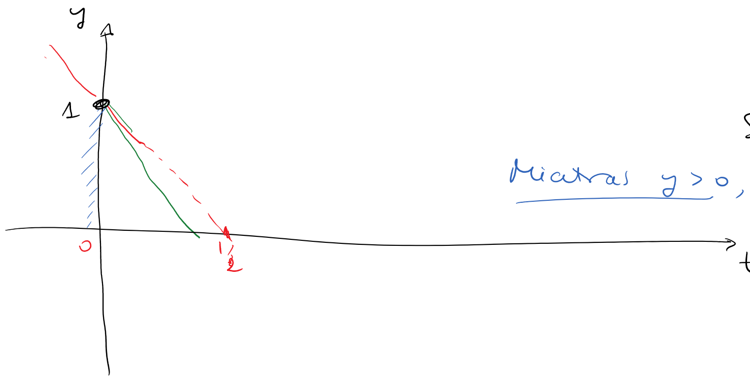
Ejercicio 5. Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} y'' + 4t^2 y = -2\,\mathrm{sen}(t^2) - 8t^3, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Hallar aproximadamente el valor $y'(t_1)$, donde t_1 es la menor raíz de $y(t)$ en el intervalo $[0,1]$. Para ello, escribir la ecuación como un sistema de primer orden, y utilizar el método de Euler hacia atrás con paso $h = 0{,}1$ (en la iteración de punto fijo realizar tres iteraciones). Interpolar linealmente para hallar aproximadamente t_1.



$$y'' = \overbrace{-4t^2 y}^{[-4y,\,0]} \underbrace{-\,2\,\mathrm{sen}(t^2)}_{[-2,\,0]} \underbrace{-\,8t^3}_{[-8,\,0]}$$

Si $t \in [0,1]$

Mientras $y > 0$, $y'' \le 0$

$\Rightarrow$ $\underbrace{y' \text{ decrece}}_{\le -2}$, y decrece.

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow Y' = \begin{pmatrix} y' \\ -4t^2 y - 2\,\mathrm{sen}(t^2) - 8t^3 \end{pmatrix} = f(t, Y)$$

Ejercicio 6 (Runge-Kutta). Realizar 10 pasos del método de Runge-Kutta de orden 4 discutido en el teórico para determinar aproximadamente el valor $y(3)$ de la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t-y}{t}, \\ y(2) = 3. \end{cases}$$

Hallar el error cometido resolviendo analíticamente la ecuación.

[Sugerencia: realizando el cambio de variable $z = y/t$, se obtiene una ecuación de variables separables.]

$$\boxed{y' = 1 - \frac{y}{t}} \to y' + \frac{y}{t} = 1. \to \frac{ty' + y}{t} = 1.$$

$$u = yt \qquad \boxed{u' = t}$$

$$z = y/t \to z' = \frac{y't - y}{t^2} = \frac{y'}{t} - \frac{z}{t} \to y' = tz' + z$$

$$\boxed{tz' + z = 1 - z} \to \frac{z'}{1-2z} = \frac{1}{t}$$

$$\int_{z}^{z} \frac{d\tilde{z}}{1-2\tilde{z}} = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tilde{t}}\, d\tilde{t} \to -\frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{1-2z}{1-2z_0}\right|\right) = \ln(t/t_0)$$

$$y(2) = 3 \to \frac{y(2)}{2} = \frac{3}{2} > 1/2.$$

$$|1-2z| = |1-2z_0| \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}$$

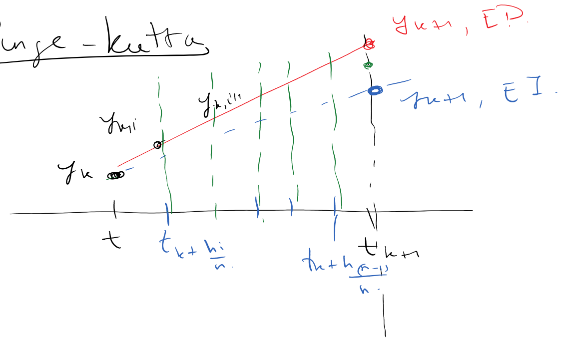
si $z > 1/2$. $\quad 2z - 1 = |1-2z_0| \cdot \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}$

$$z = \frac{1 + \dots}{2}.$$

deshaciendo c.v.

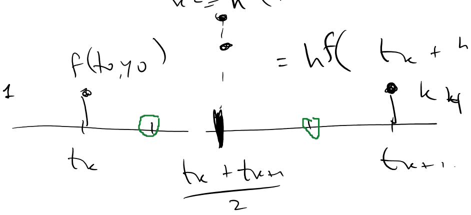
$$y = t \cdot \left(\frac{1 + |1-2z_0| (t/t_0)^{-2}}{2}\right)$$

Runge-Kutta



$$y_{k+1} = y_k + f\left(t_k + \frac{hi}{n}, y_{k,i}\right)$$

Runge-Kutta 4.



$k_2 = h(f\, t_k + h/2, y_k + k_1/2)$

$= hf(t_k + h/2, y_k + k_2/2)$

$k_4 = hf(t_{k+1}, y_k + k_3)$

$$y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0)$$

$$\Rightarrow y_{k+1} = y_k + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{}$$

6

Ejercicio 7 (Método *leapfrog*). La diferencia centrada

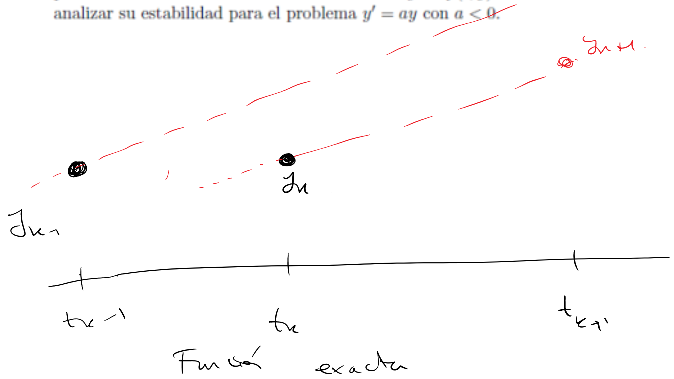
$$y'(t_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$$

da lugar al método *leapfrog de dos pasos*

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2h_k f(t_k, y_k)$$

para resolver la ecuación diferencial ordinaria $y' = f(t,y)$. Determinar el orden de este método y analizar su estabilidad para el problema $y' = ay$ con $a < 0$.

$$f'(x) \approx \frac{f(x+a) - f(x-a)}{2a}$$



$$y'(t_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$$

$$y_{k+1} := 2hy'(t_k) + y_{k-1}$$
$$= y_{k-1} + 2h\, f(t_k, y_k)$$

Función exacta

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\, y'(t_k) + O(h^2)$$
$$= \left[y(t_{k-1}) + h\, y'(t_{k-1}) + O(h^2)\right] + h\, y'(t_k) + O(h^2)$$
$$= y(t_{k-1}) + h\left(y'(t_{k-1}) + y'(t_k)\right) + O(h^2)$$

$$y'(t_{k-1}) = y'(t_k) - \overbrace{h\, y''(t_k) + O(h^2)}^{O(h)}$$

Taylor para y' hacia atrás.

$$= y(t_{k-1}) + h\left(2y'(t_k) + O(h)\right) + O(h^2)$$
$$= y(t_{k-1}) + 2h\, \underbrace{y'(t_k)}_{f(t_k, y_k)} + O(h^2)$$

$$y(t_{k+1}) - y_{k-1} - 2h\, f(t_k, y_k) = O(h^2) \quad \checkmark$$

Ejercicio 8 (*Solvers* para problemas rígidos). El problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = -1000(y - \operatorname{sen} t) + \cos t, \\ y(0) = 1, \end{cases} \longrightarrow$$

con $t \in [0, 1]$, es moderadamente rígido.

a) Hallar la solución exacta, ya sea a mano o con el comando `dsolve`.

b) Computar la solución usando `ode23`. ¿Cuántos pasos se necesitan?

c) Computar la solución usando `ode23s`, que está diseñado para ecuaciones rígidas. ¿Cuántos pasos se necesitan?

d) Graficar las soluciones obtenidas en las dos partes anteriores, y hacer zoom en una región en la que la solución varíe rápidamente y en una región en la que varíe lentamente. ¿Cómo son los pasos de ambos algoritmos en estas regiones?

$$\overbrace{y' = \cos t}^{y = \operatorname{sen} t} + \text{perturbación}(t, y)$$

$y(t) =$ __ ¿? __ "cerca de sen t"

$$\overbrace{y' = -1000y}\ + 1000 \operatorname{sen} t + \cos t.$$

$y_p = \operatorname{sen} t.$ // Pruebo. $y = A \operatorname{sen} t + B \cos t$

$A \cos t - B \operatorname{sen} t = -1000 A \operatorname{sen} t - 1000 B \cos t + 1000 \operatorname{sen} t + \cos t.$

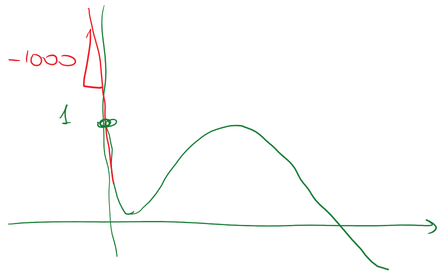
$A = -1000B + 1$

$-B = -1000A + 1000 \longrightarrow \boxed{A = 1 \\ B = 0}$

$y_H = y_0 e^{-1000(t - t_0)}$

CI. $y(0) = 1$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \overbrace{e^{-1000t}}^{\text{perturbación}} + \underbrace{\operatorname{sen} t}_{\text{sin perturbación.}}$$



$\underbrace{\text{dsolve}}$ || $\underbrace{\text{fsolve}}_{f(\dots),\ x_0}$ || $\underline{\text{solve}}$('____', 'x')

↓

$f'(t, y) = y.$