Repaso:

$(x_i, y_i)_{i=0}^{n} \rightsquigarrow \exists!$ polinomio de grado $n$ que cumple $p(x_i) = y_i$

$\boxed{x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j}$

M. Vandermonde

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

M. Lagrange:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y^k L_n^k(x)$$

↳ polinomios de grado $\hat{=}$ que valen 1 en $x_k$ y 0 en los demás $x_i$

$$L_n^k(x) = \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

M. Newton:

$$p_n(x) = \underbrace{p_{n-1}(x)} + \left(y_n - p_{n-1}(x_n)\right) L_n^n(x)$$

algoritmo de Horner:

$$p(x) = a_0 + (x - x_0)\Big[a_1 + (x - x_1)\big[a_2 \cdots\big]\Big]$$

**Ejercicio 1** (Tres formas de obtener el mismo polinomio)**.** Dados los puntos $(-1,0)$, $(0,3)$, $(1,2)$, determinar el polinomio interpolante de segundo grado:

a) usando la representación monomial (matriz de Vandermonde);

b) usando la base de Lagrange;

c) usando la representación de Newton.

| $x$ | $\boxed{-1}$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $\boxed{0}$ | $3$ | $2$ |

a)
$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad -1 \quad 1} \\ 1 \quad 0 \quad 0 \\ 1 \quad 1 \quad 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\{ c_0 = 3$$

$$\begin{cases} 3 - c_1 + c_2 = 0 \\ 3 + c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -2. \end{cases}$$

$$p(x) = -2x^2 + x + 3$$

b) $$p_2(x) = \sum y^k L_2^k(x) = 0 \cdot (\text{——}) + 3 \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + 2 \, \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}$$

$$= -3(x^2-1) + x^2 + x = -2x^2 + x + 3$$

c) $$p_2(x) = a_0 + (x+1)\left[a_1 + (x-0) \cdot a_2\right]$$

$$0 = p_2(-1) = a_0$$

$$3 = p_2(0) = a_1$$

$$2 = p_2(1) = 2 \cdot \left[3 + 1 a_2\right] \Longrightarrow a_2 = -2$$

$$p_2(x) = (x+1) \cdot \left[3 - 2x\right] = -2x^2 + x + 3$$

**Ejercicio 2** (Lagrange). Se considera la función $y = f(x) = \frac{1}{x}$ y los puntos de abscisas $x_0 = 1/2, x_1 = 1, x_2 = 3/2, x_3 = 2$. Calcular el polinomio interpolador de $f$ de orden 3 los puntos $(x_i, f(x_i))$ usando la forma de Lagrange. Realizar un bosquejo de las 4 funciones de interpolación de Lagrange asociadas a estos puntos. Evaluar el polinomio interpolador en $x = 2/3$. ¿Cuál es el valor del error cometido (respecto a $f(2/3)$)?

| x | 1/2 | 1 | 3/2 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 1 | 2/3 | 1/2 |

$$p_3(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{10}{3}x^2 - \frac{35}{6}x + \frac{26}{6}$$

$$p_3(2/3) = \frac{253}{162} > \frac{243}{162} = \frac{3}{2} \rightsquigarrow \text{error: } \boxed{f - p_3 = -\frac{10}{162}}$$

**Ejercicio 3** (Del examen de julio de 2013).

a) Hallar el polinomio interpolante $p$ por los puntos $(-1,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$, utilizando el método de Lagrange.

b) Utilizando el método de Newton, hallar el polinomio interpolante $q$ por los puntos anteriores y $(4,4)$.

c) Acotar la distancia máxima entre $p$ y $q$ en el intervalo $[-1,3]$.

| x | -1 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 0 | 0 | 1 |

$\rightarrow$ a) $p_3(x) = L_3^3(x) = \frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-2)$

b)

$$p_3(x) = \frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$p_4(x) = p_3(x) + \left(y_4 - p_3(x_4)\right) L_4^4(x)$$

$$= p_3(x) + \underbrace{\left(\frac{16}{4} - \frac{15}{4}\right)}_{1/4} \frac{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}{5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= p_3(x) + p_3(x) \cdot \frac{(x-3)}{15} = p_3(x)\left[1 + \frac{x-3}{15}\right]$$

c)

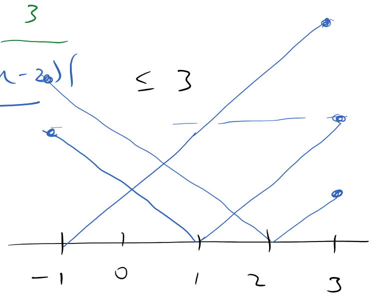
$$p_4 = p_3(x) + p_3(x)\frac{(x-3)}{15}$$

$$p_4 - p_3 = p_3(x) \cdot \frac{x-3}{15}$$

$\leq 4$ en $[-1,3]$

$$|p_4 - p_3| = \underset{\leq 1}{|p_3(x)|} \cdot \frac{|x-3|}{15} \leq \frac{4}{15} \rightarrow \text{cota para distancia.}$$

$$|p_3(x)| = \frac{\overset{\leq 4}{|(x+1)|}\,\overset{\leq 2}{|(x-1)|}\,\overset{3}{|(x-2)|}}{8} \leq 3$$



**Ejercicio 4** (Función interpolante). Escribir una función `w = interpolante(x,y,v)` que tome vectores `x` e `y` de largo $n+1$ y un vector `v` y devuelva un vector `w` del mismo tamaño que `v` y tal que `w(j) = p(v(j))`, donde `p` denota al polinomio interpolante (de grado $n$) por los puntos `(x,y)`.

Evitar usar la forma de Vandermonde. La función `interpolante` puede ser útil en varios de los ejercicios restantes del práctico.

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_n^k(x) = \sum_{k}^{n} y_k \prod_{i\neq k} \left(\frac{x - x_i}{x_k - x_i}\right)$$

$$p_n(v) = \sum_{k=0}^{n} y_k \prod_{i\neq k} \left(\frac{v - x_i}{x_k - x_i}\right)$$

**Ejercicio 5** (Ajuste de datos)**.** Supongamos tenemos una tabla de datos $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$, y queremos interpolar estos datos con un polinomio y evaluar la calidad (precisión) de la interpolación realizada. Una forma de lograr esto es dejar algunos puntos en reserva, interpolar usando los puntos restantes, y evaluar los errores en los puntos reservados. Si estos errores no son demasiado grandes, entonces es razonable creer que el interpolador "captura la tendencia" de los datos.

La siguiente tabla muestra la viscosidad relativa $V$ del etanol como función del porcentaje de peso de soluto anhídrico $w$:

| $w$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V(w)$ | 1.226 | 1.498 | 1.822 | 2.138 | 2.662 | 2.840 | 2.807 | 2.542 | 2.210 | 1.877 | 1.539 | 1.201 |

Supongamos que $p_5(w)$ interpola en $\{10, 20, 40, 60, 80, 100\}$. Computar los errores en los puntos reservados, y graficar $p_5(w)$ junto a los 12 datos. Visualmente, ¿dirías que $p_5(w)$ captura la tendencia de los datos?

Ahora considerar $p_{11}(w)$ que interpola en todos los puntos. Graficar $p_{11}(w)$ y los 12 datos. Visualmente, ¿captura $p_{11}(w)$ la tendencia de los datos?

**Ejercicio 6** (Interpolación de la función seno). Recordar que el error en la interpolación polinómica vale

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \qquad \text{(I)}$$

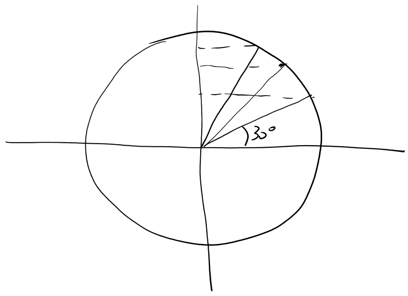
donde $c$ es una abscisa que pertenece al menor intervalo que contiene a $x_0, x_1, \dots, x_n$. Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y los puntos de interpolación $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$.

a) Calcular el polinomio de interpolación de tercer grado en este caso.

b) Utilizando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}},$$

calcular exactamente $\operatorname{sen}(\pi/8)$.




| $x$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ |

$$p_3(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{3} y_k L_n^k(x)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 1 & \pi/6 & \pi^2/36 & \\ 1 & \pi/4 & \pi^2/16 & \\ 1 & \pi/3 & \dots & \end{pmatrix}$$

$$(108\sqrt{3} - 288\sqrt{2} + 216)\frac{x^3}{\pi^3} + (144\sqrt{2} - 45\sqrt{3} - 126)\frac{x^2}{\pi^2}$$

$$+ \left(\frac{9\sqrt{3}}{2} - 16\sqrt{2} + 10\right)\frac{x}{\pi}$$

b) $$\operatorname{sen}(\pi/4) = \sqrt{\frac{1-\cos(\pi/4)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

c) Proporcionar una cota del error cometido utilizando (I). Comparar con el error real y verificar que el signo del error concuerda. Se pueden utilizar el valor de $\pi$ y la función `sqrt` de Octave.

$$f(\pi/8) - p_3(\pi/8) \simeq -2{,}8 \times 10^{-4}$$

$$f^{(4)}_{(x)} = \operatorname{sen}(x).$$

$$0 \le \otimes \le \sqrt{3}/2 \quad ¿\gamma_x?$$

$$f(x) - p_3(x) = \frac{\overbrace{f^{(n+1)}(\gamma_x)}}{\underset{24}{(n+1)!}} \cdot \underline{(x-x_0)}(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$$\left(\frac{\pi}{8}-0\right)\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{6}\right)\underline{\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{\pi}{8}\left(-\frac{\pi}{24}\right)\left(-\frac{\pi}{8}\right)\left(-\frac{5\pi}{24}\right)$$

$$f - p_3 \simeq -\frac{\sqrt{3}}{48} \cdot \frac{5\pi^4}{8^2 \cdot 24^2} \sim 4{,}4 \times 10^{-4}$$

**Ejercicio 8** (Aproximación de derivada con diferencias hacia adelante). Dada una función $f$ continua y tal que $f', f'', f'''$ son continuas, y tres puntos equiespaciados $x_1, x_2 = x_1 + h, x_3 = x_1 + 2h$, queremos aproximar $f'(x_1)$. Sea $p(x)$ el polinomio cuadrático que interpola $(x_i, f(x_i))_{i=1}^3$.

a) Escribir $p$ en la forma de Lagrange.

b) Mostrar la fórmula de *diferencias hacia adelante*

$$p'(x_1) = \frac{1}{2h}\left(-3f(x_1) + 4f(x_2) - f(x_3)\right).$$

c) Probar que esta expresión da una aproximación de segundo orden de $f'(x_1)$. Esto es, demostrar que

$$|f'(x_1) - p'(x_1)| \leq Ch^2,$$

donde $C$ depende de $f'''$.

Primera aprox:

$$p'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h}$$

| $x$ | $x_1$ | $x_2 = x+h$ | $x_3 = x_1+2h$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ |

a)

$$p_2(x) = f_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{\underbrace{(x_1-x_2)}_{-h}\underbrace{(x_1-x_3)}_{-2h}} + f_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{\underbrace{(x_2-x_1)}_{h}\underbrace{(x_2-x_3)}_{-h}} + f_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{\underbrace{(x_3-x_1)}_{2h}\underbrace{(x_3-x_2)}_{h}}$$

$$= \frac{1}{\phantom{2h^2}}\left[ f_1 \quad (x-x_3) - 2f_2(x-x_1)(x-x_3) + f_3(x-x_1)(x-x_2)\right]$$

$f(x-\alpha)(x-\beta)$

derivas:

$f[(x-\alpha) + (x-\beta)]$

b) Derivamos y vemos qué pasa.

$$\boxed{p_2'(x_1)} = \frac{1}{2h^2}\Big[ f_1\big[\overbrace{(x_1-x_2)}^{-h} + \overbrace{(x_1-x_3)}^{-2h}\big]$$

$$-2f_2\big[\underbrace{(x_1-x_1)}_{0} + \underbrace{(x_1-x_3)}_{-2h}\big] + f_3\big[\underbrace{(x_1-x_1)}_{0} + \underbrace{(x_1-x_2)}_{-h}\big]\Big]$$

$$= \frac{1}{2h^2}\left[-3hf_1 + 4hf_2 - hf_3\right] = \boxed{\frac{-3f_1 + 4f_2 - f_3}{2h}}$$

c)

$$p_2'(x_1) = \left[-3f(x_1) + 4f(x_1+h) - f(x_1+\boxed{2h})\right]\frac{1}{2h}$$

Taylor alrededor de $x_1$

$$= \frac{1}{2h}\Big[-3\cancel{f(x_1)}$$

$$+ 4\left(\cancel{f(x_1)} + hf'(x_1) + \cancel{\frac{h^2}{2}f''(x_1)} + \frac{h^3}{3!}f'''(x_1) + O(h^4)\right)$$

$$\left(\cancel{f(x_1)} + \boxed{2h}f'(x_1) + \cancel{\frac{(2h)^2}{2}f''(x_1)} + \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x_1) + O(h^4)\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{2h}\left[2f'(x_1) + \left(\frac{4h^3}{6} - \frac{8h^3}{6}\right)f'''(x_1) + O(h^4)\right]$$

$$= \underbrace{f'(x_1)}_{} - \underbrace{\frac{1}{3}f'''(x_1)h^2}_{} + \underbrace{\cancel{O(h^3)}}_{}$$

$$f'(x_1) - p_2'(x_1) = \mathcal{O}\left(f''' \right) \cdot h^2$$