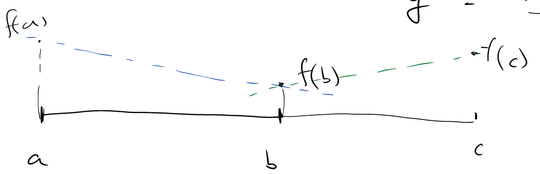
Polinomios Interpolantes

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - \quad + f(a) .$$



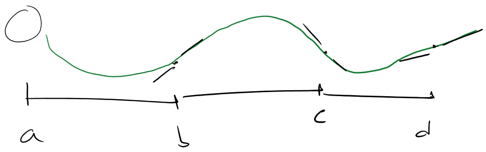
$\longrightarrow$ Interpolación con puntos

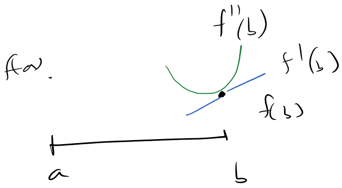
$\longrightarrow$ Interpolación con puntos y derivadas.

$\Rightarrow$ con un polinomio de grado 3 siempre puedo interpolar.

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(a) = f(a) \\ p'(a) = f'(a) \\ p(b) = f(b) \\ p'(b) = f'(b) \end{cases}$$





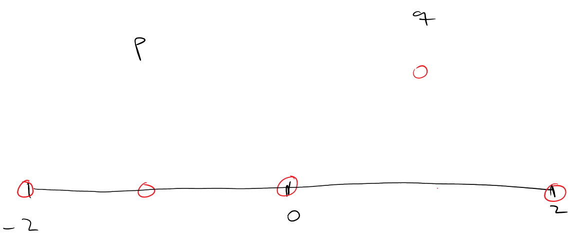
$\longrightarrow$ Spline la función que corresponde a concatenar los polinomios es continua, y su derivada primera y segunda son continuas.

Ejercicio 9 (Interpolación cúbica a trozos). Se busca $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ definida por dos polinomios p y q cúbicos de acuerdo a

$$f(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si } x \in [-2,0], \\ q(x) & \text{si } x \in [0,2], \end{cases}$$

que tenga derivada segunda continua en $[-2,2]$ e interpole los puntos $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,0)$.

1. Escribir el sistema de ecuaciones que permite hallar los coeficientes de los polinomios p y q.
2. Sea $a = f'(0)$. Hallar expresiones de p y q en función de a.
3. Determinar el valor de a para que $f(x)$ satisfaga todas las condiciones requeridas. Escribir la expresión de la función $f(x)$.



$$\begin{cases} p(-2) = 0 \\ p(-1) = 0 \\ p(0) = 0 \\ p'(0) = q'(0) \\ p''(0) = q''(0) \\ q(0) = 0 \\ q(1) = 1 \\ q(2) = 0 \end{cases}$$

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$q(x) = ex^3 + fx^2 + gx + h$$

$$\begin{bmatrix} p(x) = A(x+2)(x+1)x \\ q(x) = x(x-2)(Ex+F) \end{bmatrix} \to$$ Usando ecq' nº i, ii, iii, vi, viii

2)
$$\begin{cases} p(-2) = 0 \\ p(-1) = 0 \\ p(0) = 0 \\ p'(0) = q'(0) = f'(0) = a \\ p''(0) = q''(0) \\ q(0) = 0 \\ q(1) = 1 \\ q(2) = 0 \end{cases}$$

$$p'(x) = A\left[(x+2)(x+1) + (x+1)x + (x+2)x\right]$$
$$q'(x) = (x-2)(Ex+F) + x(Ex+F) + Ex(x-2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p'(0) = 2A \\ q'(0) = -2F \end{array}} \longrightarrow \boxed{A = \frac{a}{2}}, \boxed{F = \frac{a}{-2}}$$

$$1 = q(1) = 1\cdot(-1)(E+F) = -E-F$$
$$\boxed{E =} -1 - F = -1 + \frac{a}{2}.$$

Falta verificar $p''(0) = q''(0)$!!

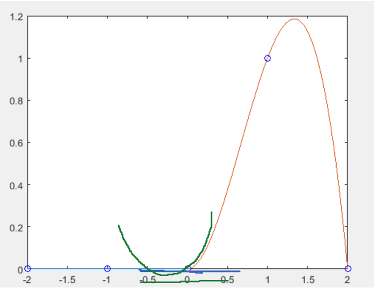
3. $$p'(x) = A\left[(x+2)(x+1) + (x+1)x + (x+2)x\right] \longrightarrow p''(x) = A\left[2x + 2(x+1) + 2(x+2)\right]$$
$$q'(x) = (x-2)(Ex+F) + x(Ex+F) + Ex(x-2)$$
$$q''(x) = 2(Ex+F) + 2E(x-2) + 2Ex.$$

$$p''(0) = 6A \quad \| \quad q''(0) = 2F - 4E$$
$$= 3a \quad \| \quad = -a + 4 - 2a = 4 - 3a.$$

$p\ (0) = 6A \quad || \quad q\ (0) = 2 \cdot$

$= 3a \quad || \quad = -a + 4 - 2a = 4 - 3a.$

$\Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$

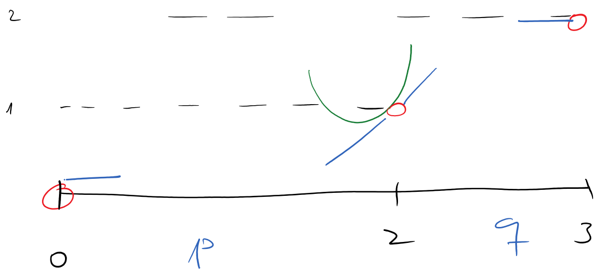


Ejercicio 10 (Spline cúbica). Determinar una spline cúbica $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ tal que

- $f(x_i) = y_i$, for $i = 1, 2, 3$, $(x_1, x_2, x_3) = (0, 2, 3)$, $(y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 2)$;
- $f\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$ es un polinomio de grado menor o igual a tres para $i = 1, 2$;
- f, f', f'' son continuas en $(0, 3)$;
- $f'(0^+) = 0$, $f'(3^-) = 0$.

Esto se puede realizar construyendo un sistema de ecuaciones lineales y resolviéndolo en Octave. Graficar la solución y compararla con la salida de la función de Octave `spline`:

```
x = [0 2 3];  y = [0 0 1 2 0];
sc = spline(x, y);
plot(linspace(0,3),ppval(sc,linspace(0,3)),'-r');
```



$$
\left\{
\begin{aligned}
p(0) &= 0 \\
p'(0) &= 0 \\
p(2) &= 1 \\
p'(2) &= q'(2) \\
p''(2) &= q''(2) \\
q(2) &= 1 \\
q(3) &= 2 \\
q'(3) &= 0
\end{aligned}
\right.
$$

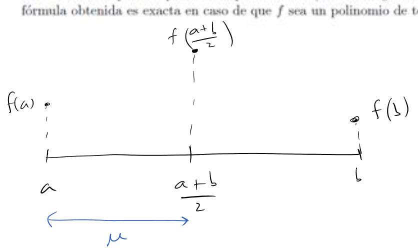
Ejercicio 11 (Integración numérica). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

a) Escribir la forma de Lagrange del polinomio cuadrático p que interpola por los puntos $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$, $(b, f(b))$.

b) Para estimar el valor de la integral $I(f) := \int_a^b f(x)\,dx$ la podemos aproximar mediante

$$Q(f) := \int_a^b p(x)\,dx.$$

Obtener una expresión para esta aproximación (llamada *regla de Simpson*). Verificar que la fórmula obtenida es exacta en caso de que f sea un polinomio de tercer grado.

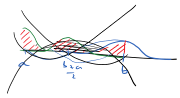


a) $p_2(x) = \sum_i f(x_i)\, L_i(x)$

$$= f(a) \cdot \frac{\left(x - \left(\frac{a+b}{2}\right)\right)(x-b)}{\underbrace{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)}_{-\mu}\underbrace{(a-b)}_{-2\mu}} + f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\frac{(x-b)(x-a)}{\underbrace{\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}_{-\mu}\underbrace{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)}_{\mu}} + f(b)\cdot\frac{\left(x-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)(x-a)}{\underbrace{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}_{\mu}\underbrace{(b-a)}_{2\mu}}$$

$$Q(f) = \int_a^b p_2(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \sum_i f(x_i)\, L_i(x)\,dx = \sum_i f(x_i) \int_a^b L_i(x)\,dx$$



$$\int_a^b \frac{\left(x - \left(\frac{a+b}{2}\right)\right)(x-b)}{2\mu^2}\,dx = \frac{1}{2\mu^2}\left[\frac{x^3}{3} - \left(b + \frac{a+b}{2}\right)\frac{x^2}{2} + x\frac{b(a+b)}{2}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2\mu^2}\left[\frac{b^3-a^3}{3} - \left(\frac{3b+a}{2}\right)\frac{b^2-a^2}{2} \quad \frac{b(a+b)}{2}(b-a)\right]$$

$b^3 - a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$

$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$

$$= \frac{\overset{2\mu}{b-a}}{2\mu^2}\left[\frac{4(b^2+ab+a^2)}{12} - \frac{3(3b+a)(b+a)}{12} + \frac{6b(a+b)}{12}\right]$$

$$= \frac{1}{12\mu}\left[4b^2 + 4ab + 4a^2 - 9b^2 - 12ab - 3a^2 + 6b^2 + 6ba\right]$$

$$= \frac{1}{12\mu}\cdot(b^2 - 2ab + a^2) = \frac{(b-a)^2}{12\mu} = \boxed{\frac{1}{3}\cdot\mu}$$

$$Q(f) = \frac{f(a)\cdot\mu}{3} + \frac{f(b)\,\mu}{3} + \frac{4\,f\left(\frac{b+a}{2}\right)}{3}\,\mu$$

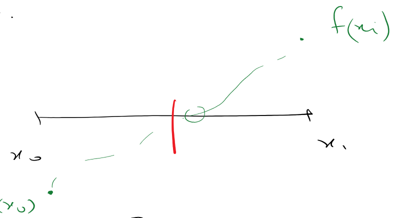
$$= \frac{\mu}{3}\left(f(a) + 4 f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

Práctico 4

Método 1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\to$ quiero hallar la raíz de f.

Si f continua: uso Bolzano iteradamente hasta hallar una raíz.

Necesitamos $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$



Si estoy en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$

Si $f(x_{k-1})\, f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) < 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_k = x_{k-1} \\ x_{k+1} = \dfrac{x_{k-1}+x_k}{2} \end{array}, \quad [x_{k-1}, x_{k+1}]$$

Si $f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right) f(x_k) < 0$

$$\Rightarrow x_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2} \to [x_{k+1}, x_k]$$

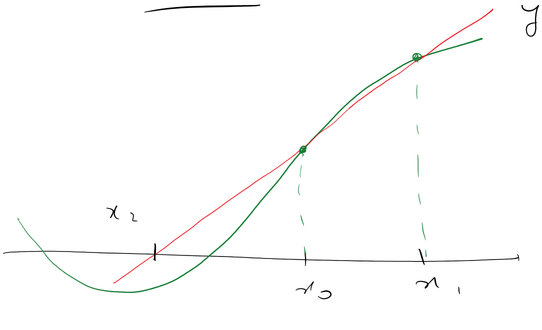
$$x_{k+1} = x_k.$$

En cada paso, el largo del intervalo se reduce a la mitad.

Desventajas: ⊛ raíces dobles no son detectadas.

Método 2: Secante.

$$y = \overbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}^{\Delta f/\Delta x}(x - x_1) + f(x_1)$$



$$x_2 = -\frac{f(x_1)}{\Delta f/\Delta x} + x_1$$

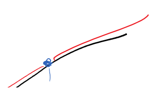
$$\vdots$$

$$x_{k+1} = -\frac{f(x_k)}{\Delta f/\Delta x} + x_k \longrightarrow \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

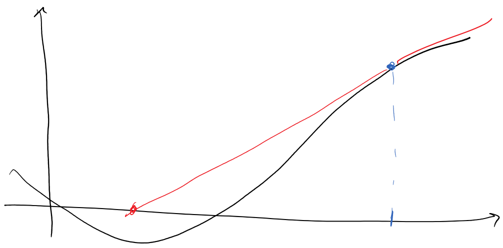
Teorema: Si $f'(x_0) \neq 0$, f de clase C^2.

$\Rightarrow \exists\, \delta : \forall x_0, x_1 \in B(x^*, \delta)$ el método converge. (orden al menos $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

Método 3: Newton (asumiendo f de clase C^1)



$$x_2 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} + x_1$$



$$x_2 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} + x_1$$

$\vdots$

$$x_{k+1} = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + x_k$$

Teorema: converge y además tiene orden a lo menos cuadrático.

Ejercicio 1 (Cómputo de recíprocos). Para $a > 0$ fijo, buscamos determinar el valor de $1/a$. Sea

$$f(x) = \frac{1}{x} - a,$$

y busquemos la solución de $f(x) = 0$ con el método de Newton.

a) Escribir la iteración de Newton y mostrar que converge si $0 < x_0 < 1/a$.

[Sugerencia: se puede usar un argumento geométrico o demostrar que $\{x_n\}$ es monótona creciente y acotada por $1/a$.]

b) Usar esta iteración para aproximar $1/\pi$: elegir un valor inicial apropiado y calcular tres iterados. Comparar el resultado con el valor numérico dado por Octave.

a) $f(x) = \frac{1}{x} - a \qquad || \qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\left(\frac{1}{x_k} - a\right)}{-\frac{1}{x_k^2}} = 2x_k - a x_k^2$$

(i) $\{x_k\}_k$ creciente. Si $x_k < 1/a \Rightarrow -x_k > \frac{1}{a}$.

$$x_{k+1} = 2x_k - a x_k^2 > 2x_k - x_k = x_k. \Rightarrow \text{creciente} \checkmark$$

(ii) $\{x_k\}_k$ acotada.

Si $x_k < \frac{1}{a} \overset{¿?}{\rightsquigarrow} \underbrace{x_{k+1}}_{\Updownarrow} < \frac{1}{a}$.

$$2x_k - a x_k^2 < \frac{1}{a} \iff 2a x_k - a^2 x_k^2 < 1$$

$$\iff 0 < \underbrace{1 + a^2 x_k^2 - 2a x_k}$$

$$\iff 0 < (1 - a x_k)^2 \checkmark$$

se cumple pq!

$x_k < \frac{1}{a}$.

Ejercicio 2 (Newton en condiciones favorables)**.** Aplicar el método de Newton a la función $f(x) = x + x^4$ y obtener una recursión explícita, expresando e^{k+1} en función de e^k (observar que $x_* = 0$). Obtener el orden de convergencia para este problema. ¿Por qué es consistente con el orden que demostramos en teórico?

$$f(x) = x + x^4 \qquad \| \qquad f'(x) = 1 + 4x^3$$

$$\boxed{x_* = 0}$$

$$e^{k+1} = x_* - x_{k+1} = \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{x_*} - \left[x_k - \frac{x_k + x_k^4}{1 + 4x_k^3} \right]$$

$$= - \left[\frac{\cancel{x_k} + 4x_k^4 - \cancel{x_k} - x_k^4}{1 + 4x_k^3} \right] = - \frac{3x_k^4}{1 + 4x_k^3}$$

Si $x_k > 0$

$$\Rightarrow |e^{k+1}| \leq 3x_k^4 = 3(\overset{0}{\uparrow}{x_*} - x_k)^4 = 3(e^k)^4$$

$\Rightarrow$ El orden es $\underline{\underline{p = 4}}$

Ejercicio 3 (Convergencia a distintas raíces). El siguiente es un polinomio cúbico con tres raíces cercanas entre sí:

$$\boxed{p(x) = 816x^3 - 3835x^2 + 6000x - 3125.} \longrightarrow \quad p(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 316 = a \\ 3835 = a(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ 6000 = a(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1) \\ 3125 = a(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \end{cases}$$

a) Usar los comandos `sym` y `factor` para determinar cuáles son las raíces exactas de p.

b) Graficar $p(x)$ para $1{,}43 \leq x \leq 1{,}71$, y mostrar la ubicación de las tres raíces.

c) Comenzando con $x^0 = 1{,}5$, ¿qué hace el método de Newton?

d) Comenzando con $x^0 = 1$, $x^1 = 2$, ¿qué hace el método de la secante?

e) Comenzando con el intervalo $[1, 2]$, ¿qué hace el método de bisección?

$\frac{r}{s}$ raíz de p $\Rightarrow$ $r \mid 3125 \rightarrow 5^5$

$s \mid 316 \rightarrow 3 \cdot 2^4 \cdot 17.$

$$p(x) = (16x - 25)(17x - 25)(3x - 5)$$