$$A^t A x = A^t y$$

$$\xrightarrow{} \text{sumas} \left[\begin{pmatrix} 1+\delta & 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

multiplicar $\times (2+\delta)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \delta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \delta & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} = \quad \equiv$$

$$(2+\delta)\, x_1 + (2+\delta)\, x_2 + 2 x_3 = 2$$

$$(2+\delta)\, x_1 + (2+\delta)\, x_2 + (1+\delta)(2+\delta)\, x_3 = (2+\delta)$$

$$x_3 = \frac{\cdots}{\cdots}$$

$$U \Sigma V^t x = y$$

$$\Sigma V^t x = \underbrace{U^t y}_{z}$$

$$\underbrace{\Sigma V^t x}_{} = z$$

$$\overbrace{z\,(1:n)}^{\text{solucionar}}, \quad \overbrace{z\,(n+1:m)}^{\text{residuo}}$$

$$\frac{1}{3 + \delta^2}$$

$$\begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ 0 & \\ 0 & 0 \quad 0 \\ 0 & 0 \quad 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{matrix} \xrightarrow{H_1} \begin{matrix} \sqrt{1+\delta^2} & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{matrix} \xrightarrow{H_2} \begin{matrix} \sqrt{1+\delta^2} & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \end{matrix} \xrightarrow{H_3} \begin{matrix} \sqrt{1+\delta^2} & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\overbrace{H_3 H_2 H_1}^{} A = R.$$

Repaso Ec. Diferenciales

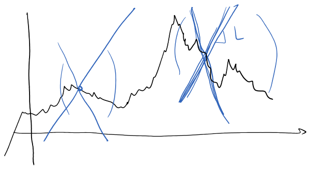
$f : \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{temporal}} \times \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{funcional}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\boxed{y'(t) = f(t, y(t))}$ $\longrightarrow$ ecuación diferecial.

$y : \underset{\text{"tiempo"}}{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

f se toma <u>Lipschitziana</u> en la segunda variable y <u>continua</u>

$$\| f(t_1, x) - f(t_2, x) \| \leq L |t_1 - t_2| \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$



<u>Ejemplos</u> 1) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\underline{y' = \alpha y}$ $\longrightarrow$ ecuación autonoma (f no depende explicitamente de la variable temporal.

$\boxed{f(t, y) = y}$

$$y' = \alpha y \Rightarrow \frac{y'}{y} = \alpha$$

$$\Rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} = \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt$$

condición inicial.

$$\Rightarrow \ln(y/y_0) = \alpha(t - t_0) \Rightarrow y = y_0 e^{\alpha(t - t_0)}$$

$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right\}$ P.V.I. (problema de valores iniciales)

2) $y' = \alpha y + \underline{\cos t}$ + $\boxed{y(t_0) = y_0}$

se resuelve mirando el cuaderno de Cálculo I !!

1º: homogénea $y' = \alpha y \longrightarrow \underline{y_H}(t) = y_0 e^{\alpha(t - t_0)}$

2º particular $\underline{y_p} = A \cos t + B \sen t$

$\boxed{y_p + y_H} \longrightarrow$ solución general. + $y(t_0) = y_0$

3) $y'' = y + 3$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Tomo $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, tal que $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

$Y' = \begin{pmatrix} y' \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix}$

Tomo $Y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\Rightarrow \quad Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y+3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y}_{\begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4)

$$y''' = y(y' + y'')$$

$$Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Y'} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y(y'+y'') \end{pmatrix} = f(y', y'', y) = \boxed{f(Y)}$$

———— x ————

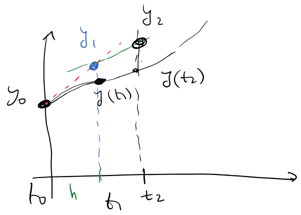
Método de Euler

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0$$

tomo h chico, $\quad y'(t_0) \approx \dfrac{y(t_1) - y(t_0)}{h}$, con $t_1 = t_0 + h$

$$\underbrace{\quad \| \quad}_{f(t_0, y_0)}$$

$$\Rightarrow \quad y(t_1) \simeq \underbrace{y(t_0) + h\, f(t_0, y_0)}_{y_1}$$



$$y(t_2) \approx y(t_1) + h\, f(t_1, y(t_1))$$
$$\approx y_1 + h\, f(t_1, y_1)$$

Método de Euler directo :

Inicializamos y_0, t_0

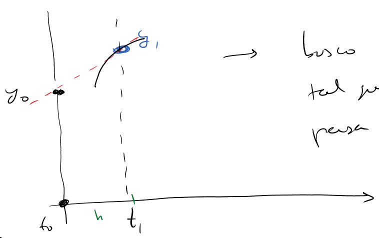
$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(t_k, y_k)$$

Método de Euler implícito ....

$y'(t_1) \approx \dfrac{y(t_1) - y(t_0)}{h}$, cociente incremental en t_1 hacia atrás.

$$\| $$
$$f(t_1, y_1)$$

$$y(t_1) \simeq \underbrace{y(t_0) + h\, f(t_1, y_1)}_{y_1}$$



→ busco el y_1 tal que su tangente pasa por y_0.

$y_1 = y_0 + h\, f(t_1, y_1) \to$ ec. implícita para y_1

$\vdots$

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

Método del trapecio

y_0, t_0, en el paso k+1 resuelve la ecuación

$$y_{k+1} = y_k + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]}_{\text{promedio de pendientes.}}$$

Ejercicio 1 (Forma estándar). Se considera que la *forma estándar* de expresar una EDO (ecuación diferencial ordinaria) con condición inicial es

$$\text{P.V.I.}\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \longrightarrow \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n} \text{ depende del problema.}$$

donde y puede ser vectorial. Expresar las siguientes EDO en forma estándar

a) $\begin{cases} y'' - 3y' + 5y = \cos t, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$ b) $\begin{cases} y''' + e^t y'' - (t^2+1)y' + 5y = t^2, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 0, \\ y''(1) = 3. \end{cases}$ c) $\begin{cases} u'' = u' + e^t v, \\ v'' = e^t u + v', \\ u(0) = 0, \\ v(0) = 1, \\ u'(0) = 2, \\ v'(0) = -1. \end{cases}$

a) $y'' - 3y' + 5y = \cos t \longrightarrow y' = \boxed{\dfrac{y'' + 5y - \cos t}{3}}$ $\cancel{f(t,y)}$

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ 3y' - 5y + \cos t \end{pmatrix} = f(t,Y)$$

vector que depende de las componentes de Y y de t.

$$Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}}_{f(t,Y)}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $y''' + e^t y'' - (t^2+1) y' + 5y = t^2$

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \Rightarrow Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ -e^t y'' + (1+t^2) y' - 5y + t^2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1+t^2 & -e^t \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}}_{f(t,Y)}$$

c) $\begin{cases} u'' = u' + e^t v \\ v'' = v' + e^t u \end{cases}$ sistema de EDO's acopladas

$$\{\ v'' = v' + e^t u$$

$$Y = \cancel{\begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix}}, \quad \underline{\begin{pmatrix} u \\ v \\ u' \\ v' \end{pmatrix}}, \quad \underline{\begin{pmatrix} u \\ u' \\ v \\ v' \end{pmatrix}}, \quad \cancel{\begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix}}$$

$$A$$

$$\begin{array}{c} \qquad 0 \qquad\qquad \mathrm{Id.} \\ Y' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ u'' \\ v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ u' + e^t v \\ e^t u + v' \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & e^t & 1 & 0 \\ e^t & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) Y}_{f(t, Y)} \end{array}$$

$$\boxed{A' = f(t, A)}$$

Ejercicio 3 (Órdenes experimentales). Consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = -y^2, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

a) Resolver la ecuación analíticamente.

b) Para $y_0 = 2$, resolver la ecuación numéricamente usando

(I) el método de Euler hacia adelante;
(II) el método de Euler hacia atrás;
(III) el método del trapecio.

En todos los casos, evaluar el error global en $t = 1$, utilizando pasos constantes $h = 1/10$, $1/20$, $1/40$, $1/80$.

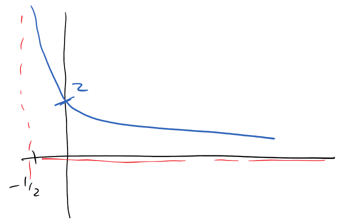
c) Asumiendo que el error global en $t = 1$ es de la forma $|e| \simeq Ch^\alpha$, donde C y α son constantes positivas, realizar un ajuste de mínimos cuadrados de los resultados experimentales para cada uno de los métodos obtenidos.
[Sugerencia: al tomar logaritmo en la expresión del error se puede obtener un problema lineal, aunque no equivalente. Ver el Ejercicio 9 del Práctico 6.]

d) Verificar que los órdenes de convergencia experimentales son consistentes con los obtenidos teóricamente.

a $\quad y' = -y^2 \implies \int_{y_0}^{y} \frac{d\tilde{y}}{-\tilde{y}^2} = \int_{t_0}^{t} dt \implies \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} = t - t_0$

$\implies y(t) = \dfrac{1}{t - t_0 + \frac{1}{y_0}}$

b) $\quad = 2, \; t_0 = 0 \qquad y(t) = \dfrac{1}{t + 1/2}.$

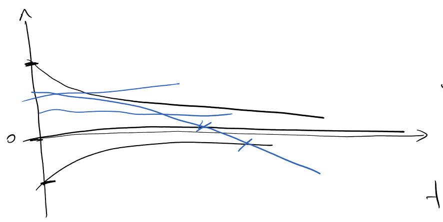


Método Implícito

$y_{k+1} = y_k + h\, f(t_{k+1}, y_{k+1}) = y_k - h\, y_{k+1}^2$

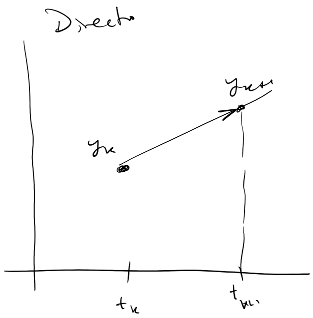
$h\, y_{k+1}^2 + y_{k+1} - y_k = 0 \longrightarrow y_{k+1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 y_k h}}{2h} > 0.$

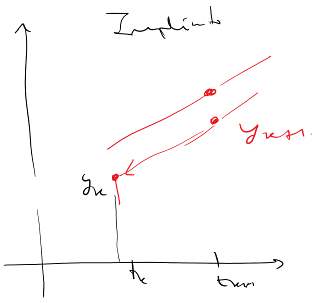
< 0 //



$y \equiv 0$ es solución.

tenemos que tomar el signo +.





Trapecio:

$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(y_{k+1}^2 + y_k^2\right) \longrightarrow y_{k+1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\frac{h}{2}\left(y_k + \frac{h}{2} y_k^2\right)}}{2\left(h/2\right)}$

Ejercicio 2 (Orden de Euler implícito). Demostrar que el método de Euler hacia atrás es de primer orden.

$$\boxed{y' = f(t,y)} \longrightarrow \text{ec. dif.}$$

$$y_{k+1} = y_k + f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

Suponemos que $y_k = y(t_k)$

$$\begin{cases} \underbrace{y(t_{k+1})}_{\text{exacta}} = y(t_k + h) \overset{\text{Taylor}}{=} y(t_k) + h \underbrace{y'(t_k)}_{= f(t_k, y_k)} + O(h^2) \\ \overbrace{y_{k+1}}^{\text{numérica}} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1}) \end{cases}$$

$$e_{k+1} = y(t_k) - y_{k+1} = \cancel{y(t_k)} - \cancel{y_k} + h f(t_k, y_k) - h f(t_{k+1}, y_{k+1}) + O(h^2)$$

$$= \underbrace{h\left(f(t_k, y_k) - f(t_{k+1}, y_{k+1}) \right)}_{\text{debemos acotar este término}} + O(h^2)$$

$$* \quad \underbrace{\| f(t_k, y_k) - f(t_{k+1}, y_k) \|}_{\text{acotado por continuidad}} + \underbrace{\| f(t_{k+1}, y_k) - f(t_{k+1}, y_{k+1}) \|}_{\text{acotado por propiedad de Lipschitz.}}$$

desigualdad triangular.

$$\Rightarrow \quad |e_{k+1}| = h\, C + O(h^2)$$

Ejercicio 4 (Método del trapecio). Hallar el valor aproximado $y(1)$ de la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = -2ty^2(1+t) - \dfrac{y}{1+t}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

resolviéndola con el método del trapecio con paso $h = 0{,}1$ (en la iteración de punto fijo, hacer solo tres iteraciones). Calcular el error cometido resolviendo exactamente la ecuación.

[Sugerencia: realizando el cambio de variable $z = y(1+t)$ se obtiene una ecuación de variables separables.]

$$(1+t)y' = -2ty^2(1+t)^2 - y.$$

$$\underbrace{(1+t)y' + y}_{\substack{\shortparallel \\ [(1+t)y]'}} = -2ty^2(1+t)^2$$

$z = (1+t)y$, la ecuación resulta.

$$z' = -2tz^2$$

$$-\frac{z'}{z^2} = 2t \longrightarrow \frac{1}{z} - \frac{1}{z_0} = t^2 - t_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{t^2 - t_0^2 + \frac{1}{z_0}}}$$

Deshaciendo el c.v.:

$$y(t) = \frac{1}{(1+t)\left(t^2 - t_0^2 + \frac{1}{(1+t_0)y_0}\right)}$$

Dada la c.I.:

$$y(t) = \frac{1}{(1+t)(t^2+1)}$$

Método Indirecto.

$$y_{k+1} = y_k + h\, f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

$$y_{k+1} - hf(t_{k+1}, y_{k+1}) - y_k = 0$$

$$\underbrace{y_{k+1} + 2hty_{k+1}^2(t+1) + \frac{y_{k+1}}{1+t} - y_k}_{g_k(y_{k+1})} = 0$$

$$g_k(y_{k+1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Salimos de } (y_k) \to \text{no.}$$

$$\boxed{x_{j+1} = x_j - \frac{g(x_j)}{g'(x_j)}}.$$

$$1 + \frac{1}{1+t} + 4ht\, y_{k+1} = g_k'(y_{k+1})$$

$$y_{k+1} = \frac{-\left(1 + \frac{1}{1+t}\right) \pm \sqrt{\left(1+\frac{1}{1+t}\right)^2 + 4y_k h t(t+1)}}{2ht(t+1)}.$$

Método del trapecio:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]$$

$$\Rightarrow \quad g_k(x) = x\left(1 + \frac{1}{2(1+t)}\right) + h\,t\,(1+t)\,x^2 - \left[y_k + \frac{h}{2} f(t_k, y_k)\right]$$

Programa:

derivada

cte dep. de y_k

```
%% Ejercicio 4
F = @(t,y) -2*t*(1+t)*y.^2 - y./(1+t);
G = @(t,x,h,y) x + h*t*(1+t)*x.^2 + h*x./(2*(1+t)) - (y + h*F(t,y)./2);
dG = @(t,x,h,y) 1 + 2*h*t*(1+t)*x + h/(2*(1+t));
y0 = 1;
N = 10;
t_final = 1;
y = zeros([1 N+1]);
t = zeros([1 N+1]);
y(1) = y0;
t(1) =0;
h = t_final/N;
j_max = 4;
for k= 2:N+1
    y_k = y(k-1);
%     x = zeros([1 j_max]);
    t_k = (k-2)*h;
    t(k) = (k-1)*h;
    x_N = y_k;
    j = 1;
    tol = 2*eps;
    err_Newton = inf;
    while (j<j_max)&&(err_Newton>tol)
        aux = x_N;
        x_N = aux - (G(t_k,aux,h,y_k))/(dG(t_k,aux,h,y_k));
        j = j+1;
        err_Newton = abs(x_N-aux);
    end
    y(k) = x_N;
end
plot(t,y,'-o', 'LineWidth',2),hold on
plot(t,1./((t + 1).*(t.^2 +1)),'r', 'LineWidth',2)
```