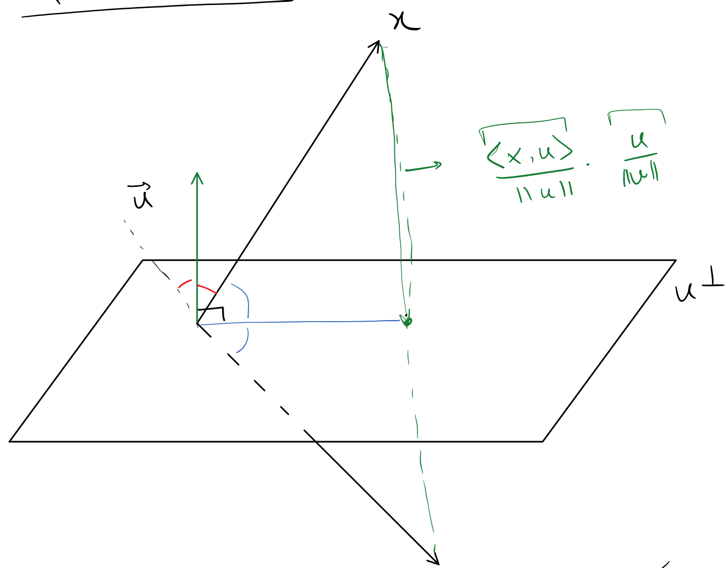
Ejercicio 4 (Reflexiones de Householder). a) Sea $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}9\\2\\6\end{bmatrix}$. Hallar la reflexión de Householder H que cumple $H\mathbf{x} = \begin{bmatrix}-11\\0\\0\end{bmatrix}$.

b) Hallar (computacionalmente) vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tales que $H\mathbf{u} = -\mathbf{u}$, $H\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Pueden ser útiles los comandos `eig` o `eigs`.

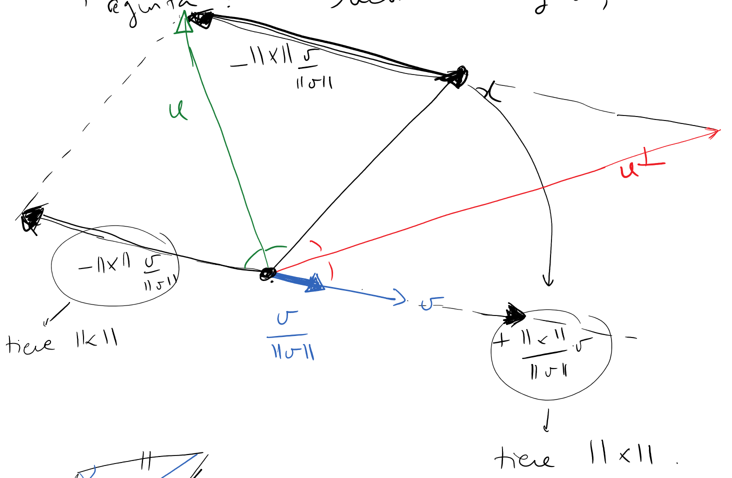
Repaso Householder:



$$Hx = x - 2\frac{\langle x,u\rangle}{\|u\|^2}\cdot u$$

Transf. de Householder dado u.

Pregunta: Dados x y v, cuál es el u / $Hx = \pm\|x\|\frac{v}{\|v\|}$.



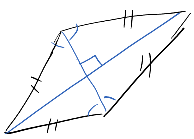
Supongamos que queremos

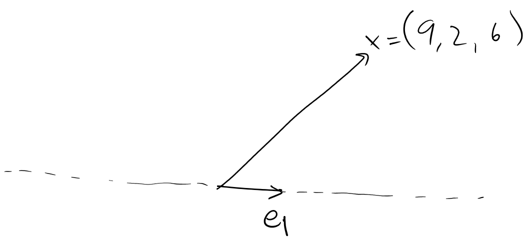
$$Hx = +\|x\|\frac{v}{\|v\|}$$

$$\Rightarrow u = x - \|x\|\frac{v}{\|v\|}$$

Si quisiéramos $Hx = -\|x\|\frac{v}{\|v\|}$

$$\Rightarrow u = x + \frac{\|x\|}{\|v\|}\cdot v$$





$$Hx = \begin{pmatrix}-11\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\|x\| = \sqrt{81+4+36} = \sqrt{121} = 11$$

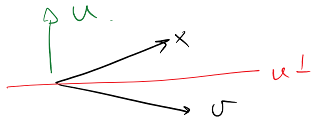
$$\Rightarrow \boxed{Hx = -\|x\| e_1}$$

$$u = x + \|x\| \cdot e_1 = (20, 2, 6)$$

$$\Rightarrow Hv = v - \frac{2 \left\langle v, \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{440}}.$$

Supongamos: $v = (6, 9, 2)$

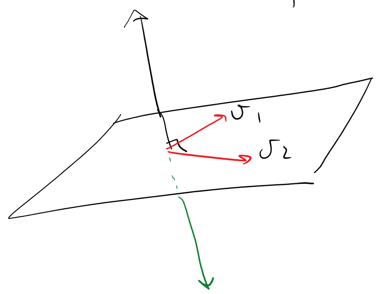
$$u = x - \frac{\|x\|}{\|v\|}(6,9,2) = (9,2,6) - (6,9,2) = (3,-7,4)$$



b) Como H isometría.

$\hookrightarrow$ v.p. tienen módulo 1.

En particular simetría especular $\Rightarrow$ vp. $(1, 1, -1)$



$Hu = -u$

$\hookrightarrow$ vp. -1.

$$\left.\begin{array}{l} Hv_1 = v_1 \\ Hv_2 = v_2 \end{array}\right\} \text{ vp } 1.$$

Ejercicio 5 (Mínimos cuadrados triangular superior). a) ¿Cuál es la norma Euclídea mínima del vector residuo para el problema de mínimos cuadrados

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}?$$

b) ¿Cuál es la solución a este problema?

$$\underset{m\times m}{Q}\,\underset{m\times n}{R} = \underset{m\times n}{A}$$

ortogonal

$$Ax = y$$

$$QRx = y$$

$$Rx = \underbrace{Q^t y}_{z}$$

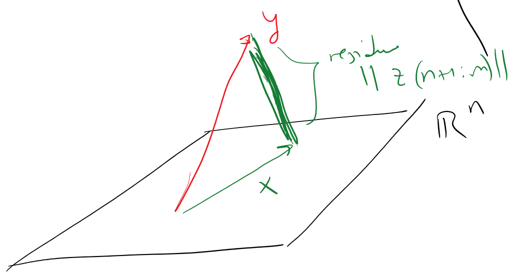
$$\begin{pmatrix} \diagdown & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{matrix}\langle R_1 \cdot x\rangle = z_1\\ \vdots \\ \langle R_n \cdot x\rangle = z_n\end{matrix}}$$

resolvemos con mínimos cuadrados

$$\boxed{\begin{matrix}0 = z_{n+1}\\ \vdots \\ 0 = z_m\end{matrix}}$$

nos da el residuo.



En el ejercicio

$$Q = Id_3$$

$$R = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix}x_1 + x_2 = 2\\ x_2 = 1\end{matrix}} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}x_1 = 1\\ x_2 = 1\end{matrix}}$$

1

residuo

Ejercicio 6 (Householder y QR). Supongamos que se está computando la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

mediante transformaciones de Householder.

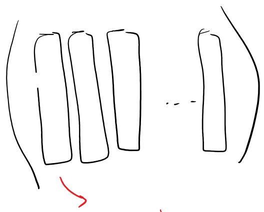
a) ¿Cuántas transformaciones de Householder se requieren?

b) ¿Cómo queda la primer columna de A luego de aplicar la primera transformación? $\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) ¿Cómo queda la primer columna de A luego de aplicar la segunda transformación?

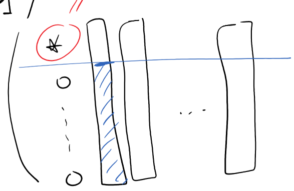
$\|(1,1,1,1)\| = \sqrt{4}$

$= 2.$

$A =$ 

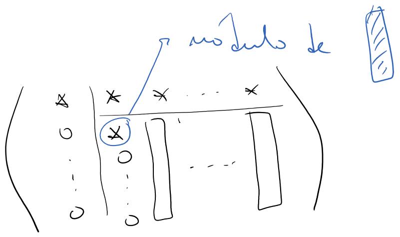
$A(:,1)$

Construyo H_1 / $\pm \| A(:,1) \|$

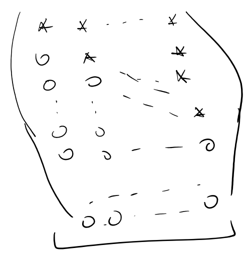
$H_1 A =$ 

En el segundo paso: construyo H_2 /

módulo de

$H_2 H_1 A =$ 

Así sucesivamente:

$\underbrace{H_n \cdots H_1}_{Q^t} A =$ 

(Recordar: si Q ortogonal, $Q^{-1} = Q^t$).

$\boxed{A = QR}$!!!

Ejercicio 7 (Comparación de métodos). Sea $\delta \geq 0$.

¿Cuál es la solución exacta al problema de mínimos cuadrados lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ?$$

Resolver computacionalmente este problema usando los siguientes métodos. Para cada método, experimentar con el valor de δ para determinar qué tan pequeño puede ser y aún obtenerse resultados precisos. Prestar atención en especial a valores de alrededor de $\delta \approx \sqrt{\varepsilon_M}$ y $\delta \approx \varepsilon_M$. Justificar los resultados obtenidos.

$$A^t A x = A^t y.$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1+\delta & 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta & 1 \\ 1 & 1 & 1+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3+\delta^2}}.$$

b) Ecuaciones normales.

c) Ortogonalización usando reflexiones de Householder.

d) Descomposición SVD con el comando `svd`.

Ejercicio 8 (Condicionamiento en el cálculo de pseudoinversas). Consideremos la familia de matrices $\{A_\delta\}_{\delta\geq 0} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}.$$

Para cada $\delta \geq 0$, calcular la pseudoinversa A_δ^+. ¿Qué implica esto sobre el condicionamiento del problema de computar la pseudoinversa de una matriz dada?

$$x^+ = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

$$\underline{A^+} = \begin{pmatrix} a_1^+ & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^+ \end{pmatrix}$$ para una matriz diagonal.

$$A_\delta^+ = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\delta \end{pmatrix} & \text{si } \delta \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } = 0. \end{cases}$$

<u>Pseudoinversa de una matriz A</u>.

~~De~~scomposición SVD:

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{U}\,\underset{m\times n}{\Sigma}\,\underset{n\times n}{V^t}$$

U: ortogonal; Σ: diagonal; V^t: ortogonal.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \\ 0 \cdots 0 & \\ 0 \cdots 0 & \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (U\Sigma V^t)^{-1} = V\,\Sigma^{-1}\,U^t$$

sentido sólo si Σ cuadrada

Recordar: A^{-1} cumple $AA^{-1} = A^{-1}A = Id$ cuando A matriz cuadrada.

$$\underset{n\times m}{A^+} = \underset{n\times n}{V}\,\underbrace{\Sigma^+}_{n\times m}\,\underset{m\times m}{U^t}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \\ \hline & 0 & \end{array}\right)^+ = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1^+ & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_n^+ & \end{array}\right)$$

Observar:

$$\Sigma\Sigma^+ = \left(\begin{array}{ccc|c} \sigma_1\sigma_1^+ & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \sigma_n\sigma_n^+ & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

$$\Sigma^+\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_1^+ & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n\sigma_n^+ \end{pmatrix}$$

Si σ_i es nulo, $\sigma_i\sigma_i^+ = 0$

$\Rightarrow$ $\Sigma^+\Sigma$ deja de ser I_n. $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (i)

Ejercicio 9 (Órbita planetaria). Un cierto planeta sigue una órbita elíptica, que en el plano puede ser escrita mediante la ecuación

$$x^2 = ay^2 + bxy + cx + dy + e,$$

donde los coeficientes orbitales a, b, c, d, e son desconocidos.

a) Se tienen las siguientes 10 observaciones de la posición del planeta:

x	1.02	0.95	0.87	0.77	0.67	0.56	0.44	0.30	0.16	0.01
y	0.39	0.32	0.27	0.22	0.18	0.15	0.13	0.12	0.13	0.15

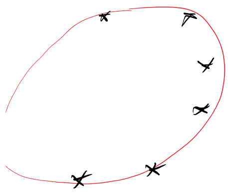
Determinar los coeficientes orbitales resolviendo el sistema de ecuaciones resultante de tamaño 10×5. Graficar las observaciones junto a la órbita resultante. Para ello, pueden ser útiles las funciones `meshgrid` y `contour`,

```
[X,Y] = meshgrid(xmin:deltax:xmax,ymin:deltay:ymax);
Z = a*X.^2 + b*X.*Y + c*Y.^2 + d*X + e*Y + f;
contour(X,Y,Z,[0 0])
```

b) Este problema está cerca de ser de rango deficiente. Para ver el efecto que esto tiene en la solución, perturbar los datos un poco sumando en cada coordenada de cada observación un número aleatorio en el intervalo $[-0{,}0005, -{,}0005]$. Computar los nuevos coeficientes para los datos perturbados, y graficar las órbitas resultantes con las observaciones originales y las perturbadas.

c) Usar la descomposición SVD para computar la solución al problema de la parte a). Con los valores singulares ordenados en forma decreciente, computar las órbitas resultantes al tomar los primeros k valores singulares, $k = 1, \ldots, 5$.

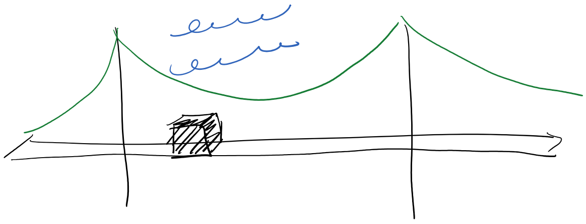
d) Repetir la parte b), pero ahora usando las aproximaciones de rango más bajo de la matriz de mínimos cuadrados. ¿Qué efecto tiene ahora la perturbación de los coeficientes sobre las órbitas computadas? ¿Qué solución te parece mejor: una que aproxime las observaciones de forma más precisa o una que sea menos sensible respecto a perturbaciones?



Qué cónica mejor aproxima los puntos.

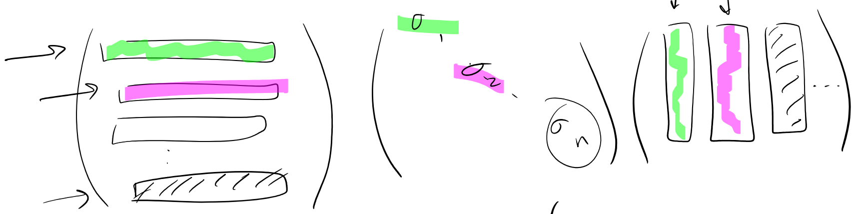
$$\begin{pmatrix} y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \cdots & & & & \\ y_{10}^2 & x_{10}y_{10} & x_{10} & y_{10} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_{10}^2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo :

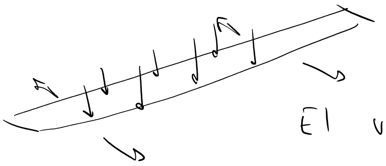


$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$U \Sigma V^t \rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \end{pmatrix}$



↳ modo de oscilación transversal.



El valor singular asociado a la oscilación debe ser mayor al doble de la frecuencia de caminata.

Ejercicio 11 (Concentración de sustancia). Se espera que la concentración de una determinada sustancia en sangre decaiga exponencialmente en el tiempo. Vamos a ajustar la función modelo

$$\underline{y = f(t; \mathbf{x}) = x_1 e^{x_2 t}}, \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2]^t,$$

a los datos

t	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y	6.80	3.00	1.50	0.75	0.48	0.25	0.20	0.15

a) Realizar un ajuste de los datos usando el método de Gauss-Newton.

b) Tomando logaritmo de la función modelo, se obtiene

$$\log(y) = \log(x_1) + x_2 t,$$

que es un modelo lineal en los parámetros $(\log(x_1), x_2)$. Realizar un ajuste de mínimos cuadrados lineal para hallar estos nuevos parámetros.

c) Graficar y comparar las soluciones obtenidas con los dos métodos. ¿Coinciden los valores de $\mathbf{x}$ determinados en las partes anteriores? ¿Coinciden los residuos? ¿Es esperable lo que se observa computacionalmente?

b) ¿Cómo hacemos para linealizar el problema?

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \quad \ln\left(x_1 e^{x_2 t}\right) = \underbrace{\ln x_1}_{\tilde{x}_1} + \underbrace{x_2}_{\tilde{x}_2} t.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = R(1:2, 1:2) \backslash z(1:2)$$

$$res = \| z(3:8) \|$$