Clase 8 - Integrales (Parte 2)

Repaso:

- Partición del intervalo $[a,b]$ es $P=\{a_0=a, a_1, \dots, a_n=b\}$ con $a_0=a<a_1<a_2<\dots<a_n=b$

$$\Rightarrow [a,b]=[a,a_1]\cup[a_1,a_2]\cup\dots\cup[a_{n-1},b]$$

- Si P, Q son particiones de $[a,b]$ entonces:
  - P es más fina que Q si $P\supseteq Q$
  - P es más gruesa que Q si $P\subseteq Q$
  - P y Q son incomparables si $P\not\subseteq Q$ y $Q\not\subseteq P$.

- Si $P=\{a_0=a, a_1, a_2, \dots, a_n=b\}$
  $\|P\|=\max\{a_1-a_0, a_2-a_1, \dots, a_n-a_{n-1}\}$

- Si P, Q son particiones de $[a,b]$
  $\Rightarrow P\cup Q$ es más fina que P y que Q.

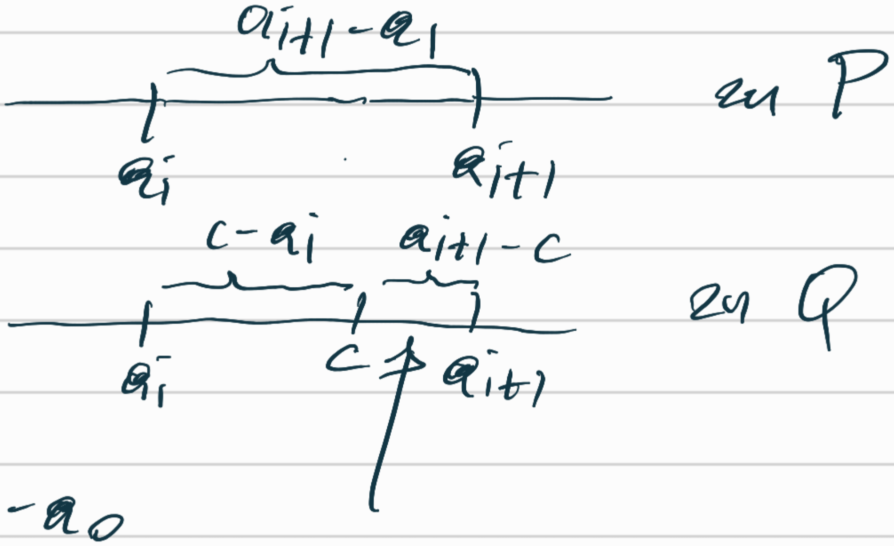
—— // ——

Prop. $P\subseteq Q \Rightarrow \|Q\|\leq\|P\|$

$\boxed{\text{Caso } Q=P\cup\{c\}}$

$$P=\{a_0=a, a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n=b\}$$
$$Q=\{a_0, a_1, a_2, \dots, \underbrace{a_i, c, a_{i+1}}, a_{i+2}, \dots, a_n=b\}$$

$$\|P\| = \max\{a_1-a_0,\ a_2-a_1, \dots, \underbrace{a_{i+1}-a_i}, \dots, a_n-a_{n-1}\}$$
$$\|Q\| = \max\{a_1-a_0,\ a_2-a_1, \dots, \underbrace{c-a_i,\ a_{i+1}-c}, \dots, a_n-a_{n-1}\}$$



$\|P\| \geq a_1 - a_0$

$\|P\| \geq a_2 - a_1$

$\vdots$

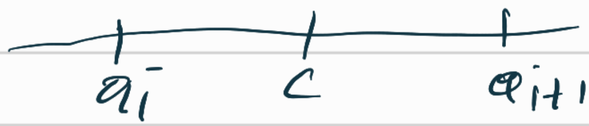
$\|P\| \geq a_{i+1} - a_i \geq c - a_i$ pues $[a_i, c] \subseteq [a_i, a_{i+1}]$

$\|P\| \geq a_{i+1} - a_i \geq a_{i+1} - c$ pues $[c, a_{i+1}] \subseteq [a_i, a_{i+1}]$

$\|P\| \geq a_{i+2} - a_{i+1}$

$\vdots$

$\|P\| \geq a_n - a_{n-1}$



Entonces $\|P\| \geq \max\{a_1-a_0,\ a_2-a_1, \dots, c-a_i,\ a_{i+1}-c,\ a_{i+2}-a_{i+1}, \dots, a_n-a_{n-1}\}$
$= \|Q\|$

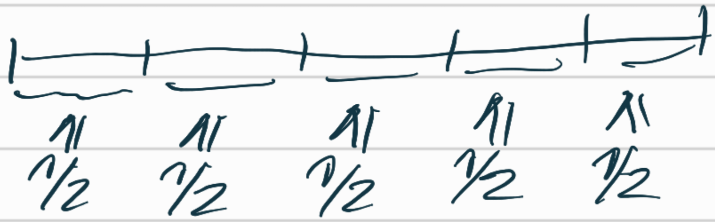
$\therefore\ \|P\| \geq \|Q\|$.

$\boxed{\text{Caso general: } Q = P \cup \{c_1, \dots, c_t\}}$

$\Rightarrow \|P\| \geq \|P \cup \{c_1\}\| \geq \|P \cup \{c_1, c_2\}\| \geq$
$\dots \geq \|P \cup \{c_1, c_2, \dots, c_t\}\| = \|Q\|$.

—//—

Obs. $\|P\| \le 1/2 \iff$

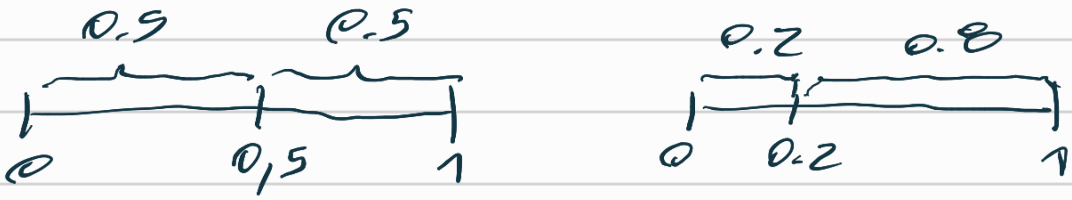


Ejercicio: 1) Encontrar particiones P, Q de $[0,1]$ incomparables con $\|Q\| < \|P\|$

2) Sea P partición de $[a,b]$, probar que: dado $\varepsilon > 0$, $\exists$ una partición $Q \supseteq P$ / $\|Q\| < \varepsilon$.

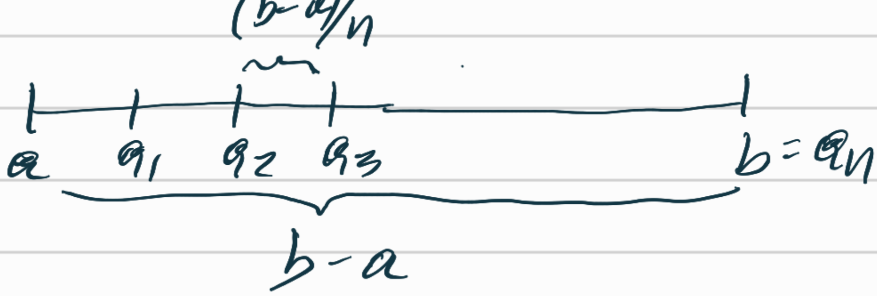
Solución 1) $Q = \{0, 0.5, 1\} \Rightarrow \|Q\| = 0.5$
$P = \{0, 0.2, 1\} \Rightarrow \|P\| = 0.8$

$\Rightarrow$



Como $P \not\subseteq Q$ y $Q \not\subseteq P \Rightarrow$ son incomparables.

Solución 2)



$$P' = \left\{ a + \frac{b-a}{n} \cdot i \ : \ i \in \{0, 1, \dots, n\} \right\}$$

es la partición equiespaciada con $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$.

Puedo elegir $n \in \mathbb{Z}^+$ / $\frac{b-a}{n} < \varepsilon \Rightarrow \|P'\| = \frac{b-a}{n} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Tomando $Q = P \cup P'$ $\Rightarrow$ $\|Q\| \leq \|P\|$, $\|Q\| \leq \|P'\|$

$\Rightarrow$
- $\|Q\| \leq \|P'\| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $\|Q\| < \varepsilon$
- $P \subseteq P \cup P' = Q$ $\Rightarrow$ Q es más fino que P.

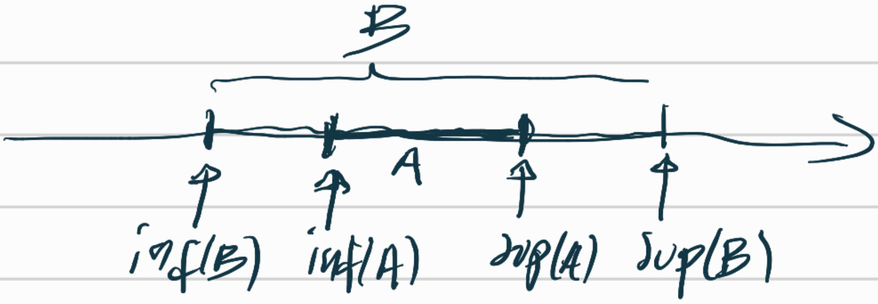
—//—

Sumas inferiores y superiores respecto de una partición P

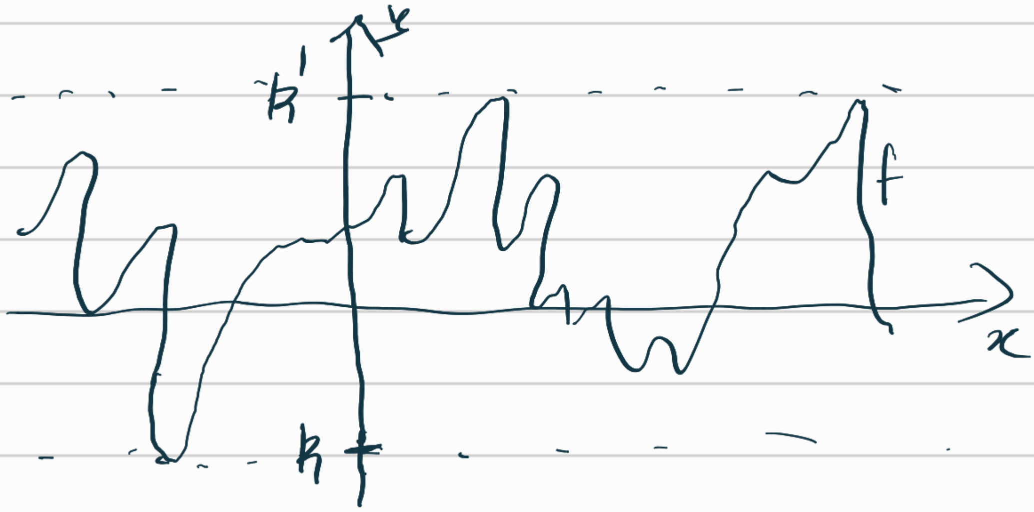
Obs A: Si $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos acotados y $A \subseteq B$

$\Rightarrow$ $\inf B \leq \inf A$

$\sup B \geq \sup A$



- Consideramos una función $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada (o sea $\exists\, k, k' \in \mathbb{R} \,/\, k \leq f(x) \leq k'$ $\forall x \in [a,b]$)



<u>Notación</u>: Si $I \subseteq [a,b]$, denotamos por

$$\inf(f,I) := \inf\{f(x) : x \in I\}$$
$$\sup(f,I) := \sup\{f(x) : x \in I\}$$

<u>Obs2</u>: Si $I \subseteq J \subseteq [a,b]$ entonces

$$\inf(f,J) \leq \inf(f,I) \underset{\text{obvio}}{\leq} \sup(f,I) \leq \sup(f,J)$$

Como $\{f(x) : x \in I\} \subseteq \{f(x) : x \in J\}$

$\overset{\text{obvio}}{\Longrightarrow}$ $\inf\{f(x) : x \in J\} \leq \inf\{f(x) : x \in I\}$

$\sup\{f(x) : x \in J\} \geq \sup\{f(x) : x \in I\}$

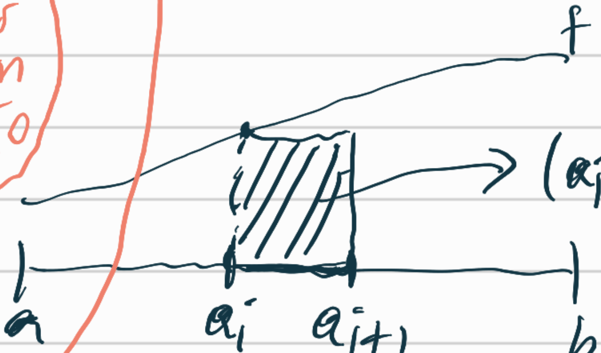
<u>Def.</u> Sea $P = \{a_0 = a, a_1, a_2, \ldots, a_n = b\}$

se define:

$$S_*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) . \inf(f, [a_i, a_{i+1}])$$

$$S^*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) . \sup(f, [a_i, a_{i+1}])$$

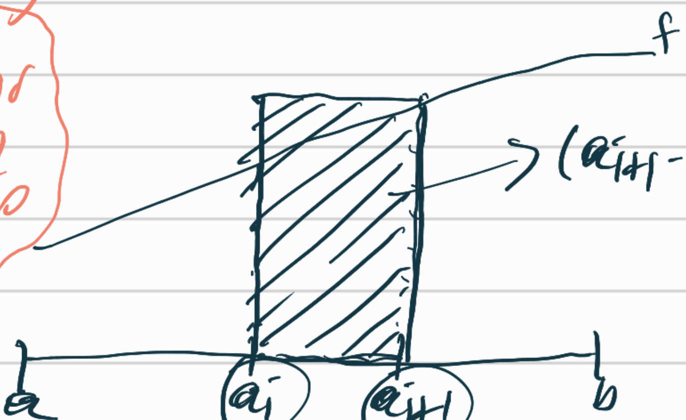
Suma inferior de f con respecto de P



$\to (a_{i+1} - a_i) . \inf(f, [a_i, a_{i+1}])$

$S_*(f,P) =$ suma de esas áreas

Suma superior de f con respecto de P

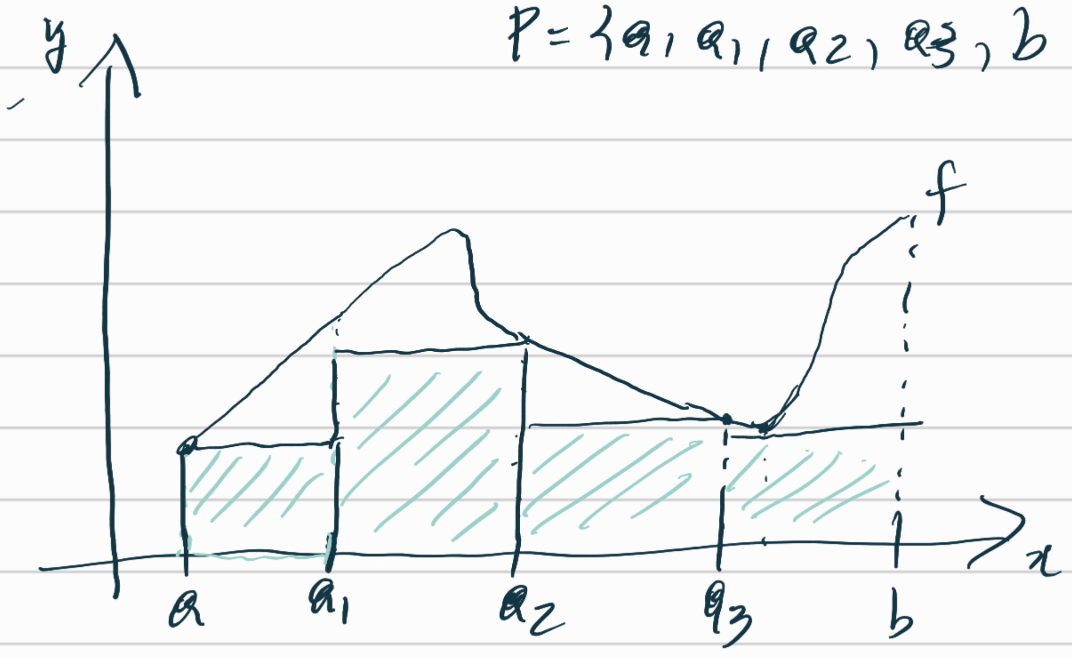


$\to (a_{i+1} - a_i) . \sup(f, [a_i, a_{i+1}])$

$S^*(f,P) =$ suma de esas áreas

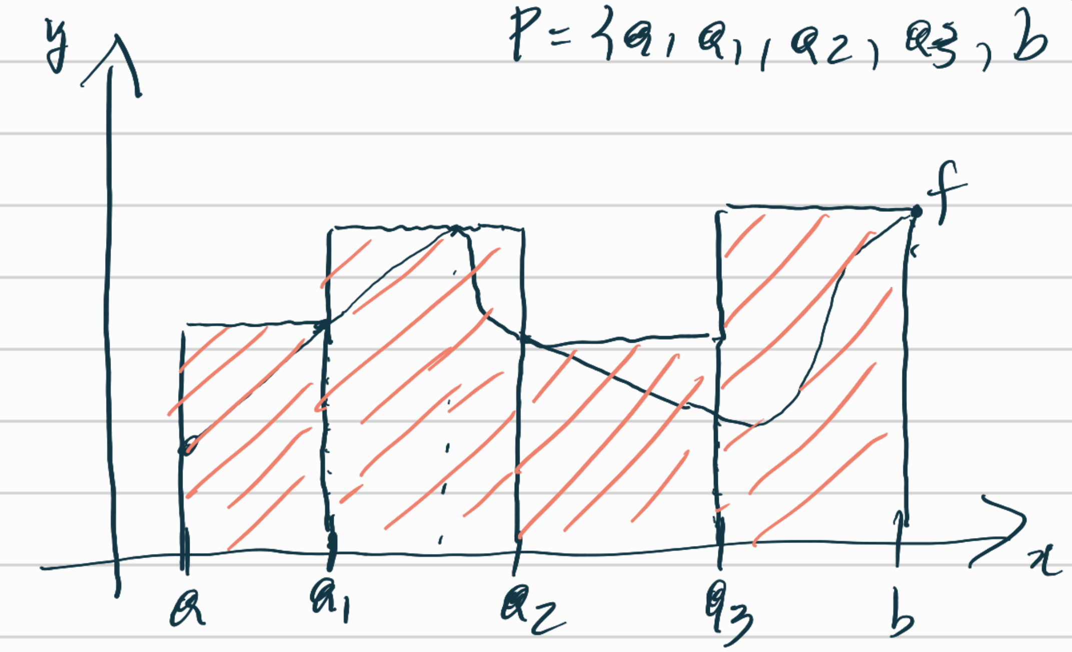
Obs.

$P = \{a, a_1, a_2, a_3, b\}$



Área $\boxed{\text{//}}$ $= S_*(f, P) \leftarrow$ aprox. por defecto del área

$P = \{a, a_1, a_2, a_3, b\}$



Área $\boxed{\text{//}}$ $= S^*(f, P) \leftarrow$ aprox. por exceso del área