Clase 8 :

Sucesiones acotadas y monótonas

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenie Ellis

eellis@fing.edu.uy

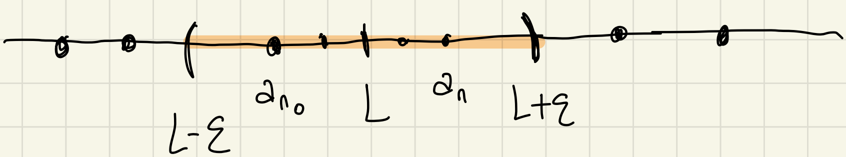
Sucesiones

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

Definición:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

otra forma de decir lo mismo $\to \left(a_n \in E(L,\varepsilon) \right)$



Ejercicio:

Sea $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$. Probar que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Sea $\varepsilon > 0$ tenemos que ver si existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - 0| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$$

Consideremos $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$, como $\mathbb{N}$

es un conjunto no acotado superiormente

Entonces $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\varepsilon} < n_0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad \dfrac{1}{n_0} < \varepsilon \\ \\ \text{Si} \quad n_0 \leq n \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$$

Es decir, Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tal que si $n \geq n_0$ entonces.

$$|a_n - L| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Proposición: unicidad del límite

Si $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L' \end{array}\right\} \Rightarrow L = L'$

<u>Dem:</u> Supongamos $L \neq L'$ entonces $L - L' \neq 0$ y podemos considerar

$$\varepsilon = \frac{L - L'}{2} \quad (\text{Suponemos que } L > L')$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L \overset{\text{def límite}}{\Longrightarrow} \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in E(L,\varepsilon)$ $\forall n \geqslant n_0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L' \Longrightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in E(L',\varepsilon)$ $\forall n \geqslant n_1$

$\Rightarrow$ Si $n \geqslant n_0$ y $n \geqslant n_1$

$$\Rightarrow \quad a_n \in E(L,\varepsilon) \quad \text{y} \quad a_n \in E(L',\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad a_n \in E(L,\varepsilon) \cap E(L',\varepsilon)$$

Pero $E(L,\varepsilon) \cap E(L',\varepsilon) = \emptyset$ y es absurdo que $a_n \in \emptyset$.

Por lo tanto es absurdo suponer $L \neq L'$.

Def: sucesión acotada

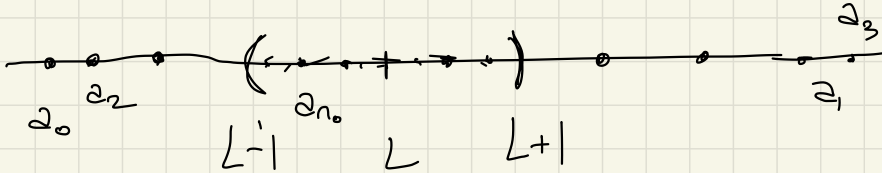
Decimos que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada si $\exists\, K \in \mathbb{R}$ tal que

$$|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proposición: Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L \Rightarrow$

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada

Dem:



Si $\varepsilon = 1$, como $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$

tal que $a_n \in E(L, 1) \quad \forall n \geq n_0$

$$|a_n - L| < 1$$

$$L - 1 < a_n < L + 1$$

$$\Rightarrow \quad |a_n| < |L| + 1 \quad \forall n \geq n_0$$

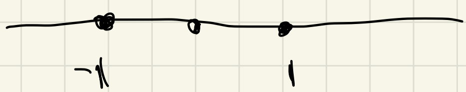
Tomamos

$$K = \{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, |L|+1\}$$

$$\Rightarrow \quad |a_n| < K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ está acotada.}$$

$\cancel{\Leftarrow}$ La sucesión $a_n = (-1)^n$ es sucesión acotada pero no tiene límite



Def: Decimos que una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monotona creciente (decreciente) si $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(a_{n+1} \leq a_n)$

Decimos que es estrictamente creciente si $a_{n+1} > a_n$ y estrictamente decreciente si $a_{n+1} < a_n$

Teorema:

Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y acotada $\Rightarrow$ $\exists L \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$

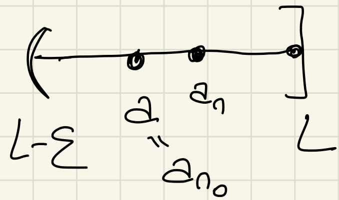
Dem: Consideramos $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

(A es acotado porque $|a_n| \leq K$ ya que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada.)

Por el axioma de completitud de $\mathbb{R}$ todo conjunto acotado y no vacío tiene supremo.

Consideramos $L = \sup A$

Dado $\varepsilon > 0$ existe un elemento $a \in A$ tal que $a \in (L-\varepsilon, L]$



Como $a \in A$ $\quad a = a_{n_0}$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$

Como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente

$$\Rightarrow \quad a_{n_0} \leq a_n$$

$$\Rightarrow \quad a_n \in E(L,\varepsilon) \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

□

Ejercicio: Probar la versión del teorema para sucesiones monótonas decrecientes

Teorema: $\left.\begin{array}{l}\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ acotada} \\ \text{y monótona decreciente}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = L$

Ejercicio:

1) Si $a_n \leq b_n \Rightarrow L \leq L'$

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$

$\lim_{n\to\infty} b_n = L'$

2) $\left.\begin{array}{l} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ sucesión acotada} \\ \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

Propiedades: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ talesque

$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = B$

1) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = A - B$

3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$

4) Si $B \neq 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$

Dem: 1) Tenemos que probar que:

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n + b_n \in E(A+B, \varepsilon) \quad \forall n \geq n_0$$

$$a_n + b_n \in E(A+B, \varepsilon) \Leftrightarrow |a_n + b_n - A - B| < \varepsilon$$

$$|a_n - A + b_n - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$$

Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = A \Rightarrow$ Dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $\lim_{n\to+\infty} b_n = B \Rightarrow$ Dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ teremos que

$$|a_n + b_n - (A+B)| \leq \underbrace{|a_n - A|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|b_n - B|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$\forall n \geq n_2$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n + b_n = A + B$$