Clase 7:

Sucesiones

CDIVV – 2023 - 2sem

Eugenie Ellis

eellis@fing.edu.uy

Hallar las constantes a y b para que $y(x) = e^{2x}\cos x$ sea solución de la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = 0$$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ tiene raíces

$$2 \pm i \quad \begin{cases} 2+i \\ 2-i \end{cases}$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i)$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + i\lambda - 2\lambda + 4 - 2i - i\lambda + 2i - i^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-2 \cancel{+i} \cancel{-i} - 2) + 4 \cancel{-2i} \cancel{+2i} + 1$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-4) + 5$$

$\boxed{a = -4}$ $\boxed{b = 5}$

$$y(x) = \underbrace{e^{2x}\cos x}_{y} \quad \text{es solución de} \quad \boxed{y'' + a y' + b y = 0} \quad (E)$$

si

$$y'(x) = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\operatorname{sen} x$$

$$y''(x) = 4e^{2x}\cos x - 4e^{2x}\operatorname{sen} x - e^{2x}\cos x$$

$$y'' + a y' + b y = 0$$

$$3e^{2x}\cos x - 4e^{2x}\operatorname{sen} x + a\left(2e^{2x}\cos x - e^{2x}\operatorname{sen} x\right)$$

$$+ \ b\left(e^{2x}\cos x\right) = 0$$

$$e^{2x}\left(\underline{3\cos x} - 4\operatorname{sen} x + \underline{2a\cos x} - a\operatorname{sen} x + \underline{b\cos x}\right) = 0$$

$$e^{2x}\left(\cos x\,\overbrace{(3+2a+b)}^{=0} + \operatorname{sen} x\,\overbrace{(-4-a)}^{=0}\right) = 0$$

$$3 - 8 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 5} \qquad \boxed{a = -4}$$

Tipos de ecuaciones que vamos a poder resolver:

- Ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables

$$\boxed{y' = A(y)\,B(x)}$$ ✓

- Ecuaciones diferenciables lineales de primer orden

$$\boxed{y' + a(x)\,y = r(x)}$$ ✓

- Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

$$\boxed{y'' + ay' + by = r(x)} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$ ✓

(H) $\boxed{y'' + ay' + by = 0}$ $a, b \in \mathbb{R}$

Si la ecuación característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

- tiene dos soluciones reales distintas $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y_H(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Solución general de (H)

- tiene una solución real λ

$$\boxed{y_H(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Solución general de (H)

- tiene soluciones complejas $\alpha \pm \beta i$

$$\boxed{y_H(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)}$$

Solución general de (H)

(E) $\boxed{y'' + ay' + by = r(x)}$ $a, b \in \mathbb{R}$

$$y_E(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

y_E: solución general de (E)

y_H: solución general de (H)

y_P: UNA solución particular.

Buscamos soluciones de la forma de $r(x)$

Si $y_1(x)$ es solución de $\boxed{y'' + ay' + by = r_1(x)}$

e $y_2(x)$ es solución de $\boxed{y'' + ay' + by = r_2(x)}$

entonces $y_1(x) + y_2(x)$ es solución de

$$\boxed{y'' + ay' + by = r_1(x) + r_2(x)}$$

Ejemplo: Hallar la solución general de la ecuación

$$(E) \quad y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$$

solución general de (E) — solución general de (H) — solución particular de (E)

$$y_E(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

$y_H(x)$: Tenemos que ver la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ tiene raíces $\lambda = -1$ doble

e^{-x} e xe^{-x} son soluciones

$$\boxed{y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$y_P(x)$: Buscamos soluciones del estilo de $r(x) = 2e^{-x}$. Veamos si $c(x)e^{-x}$ es solución

$y_P(x) = c(x)e^{-x}$ es solución si $y_P'' + 2y_P' + y_P = 2e^{-x}$

$$y_P'(x) = c'(x)e^{-x} - e^{-x}c(x)$$

$$y_P''(x) = c''(x)e^{-x} - c'(x)e^{-x} + e^{-x}c(x) - e^{-x}c'(x)$$

$c(x)e^{-x}$ es solución de (E) si

$$e^{-x}\left(c''(x)-2c'(x)+c(x)\right)+2e^{-x}\left(c'(x)-c(x)\right)+c(x)e^{-x}-2e^{-x}=0$$

$$e^{-x}\left(c''(x)-\cancel{2c'(x)}+\cancel{c(x)}+\cancel{2c'(x)}-\cancel{2c(x)}+\cancel{c(x)}-2\right)=0$$

$$e^{-x}\left(c''(x)-2\right)=0$$

como función

$$c''(x)-2=0 \qquad c''(x)=2$$

si $c(x)=x^2 \Rightarrow c(x)e^{-x}$ es solucion

$$\boxed{y_p(x)=x^2e^{-x}}$$

$$\boxed{y_E(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+x^2e^{-x} \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R}.}$$

Sucesiones

Una sucesión de números reales es una función

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

y denotamos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión y a_n al término n-ésimo de la sucesión

Una sucesión de números complejos es una función

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Una sucesión de vectores en $\mathbb{R}^n$ es una función

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Ejemplos:

1) **Sucesión de Fibonacci:**

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 1 \qquad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sucesión de números naturales

$a_0 = 1$

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = 3$

$a_4 = 5$

$a_5 = 8$

$a_6 = 13$

$\vdots$

2) **Sucesión constante** $a_n = \pi \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) **Sucesión de Euler**

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad n \geq 1$$

4) $a_n = n$

5) **Sucesión alternada** $a_n = (-1)^n$

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$$
$$= (1, -1, 1, -1, \ldots)$$

No hay que confundir la sucesión con el recorrido de la sucesión

$$\{-1, 1\}$$

6) $a_n = \dfrac{1}{n} \qquad n \geq 1$

7) $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n} \qquad n \geq 1$.

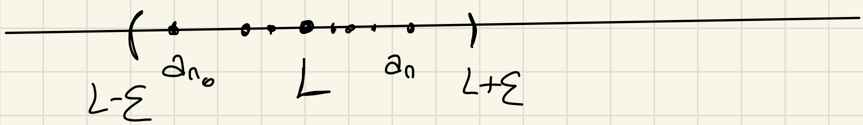
Definición: Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, decimos que L es el límite de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuando n tiende a infinito sii

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$\forall n \geq n_0 \quad |a_n - L| < \varepsilon$

$$a_n \in E(L,\varepsilon)$$

Notación: $$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$



Ejercicio: Ver los límites de los ejemplos (usando la definición)

Ejercicio: Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L\\[1em] \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L'\end{array}\right\} \Rightarrow L = L'$$