Simulación a Eventos Discretos

Tema 4: Modelado estocástico (parte 1)

Modelos estocásticos de SED

- Hasta ahora hemos visto ejemplos de modelos donde algunos parámetros relevantes son determinísticos, por ejemplo, tiempos entre arribos y tiempos de actividades fijos.

- Pero en la realidad, los procesos generalmente están sujetos a variabilidad, lo cual no puede ignorarse en el análisis dado que se puede incurrir en errores en la estimación de las medidas de interés.

- Esta variabilidad puede modelarse con distribuciones de probabilidad.

- En esta clase haremos un breve repaso de conceptos básicos de Probabilidad y Estadística aplicados a SED.

Terminología y conceptos: v.a. discretas

- X es una variable aleatoria (v.a.) discreta si la cantidad de sus posibles valores $x_1, x_2, \ldots$ es finita o infinita contable (numerable). Por ejemplo, la cantidad de arribos de pacientes a un hospital en un día.

- Para cada realización posible x_i en R_X (espacio de rango), $p(x_i) = P(X = x_i)$ es la probabilidad de que la v.a. tome el valor x_i.

- Los valores $p(x_i)$ deben cumplir: (i) $p(x_i) \geq 0 \, \forall i$, (ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

- La colección de pares $(x_i, p(x_i))$ es la distribución de X y $p(x)$ es la función de masa de probabilidad de X.

- Ejemplo: X es el resultado de varias tiradas de un dado, $R_x = \{1, 2, \ldots 6\}$ y $p(x_i)$ es la proporción de tiradas donde el resultado fue x_i.

Terminología y conceptos: v.a. continuas

- Si R_X es un intervalo o colección de intervalos, X es continua. La probabilidad de que caiga en el intervalo $[a, b]$ es $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

- $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de X, que debe cumplir: (i) $f(x) \geq 0$, (ii) $\int_{R_X} f(x)dx = 1$, (iii) $f(x) = 0$ si x no está en R_X. La probabilidad de un punto cualquiera es nula.

- Ejemplo: X es el tiempo entre arribos consecutivos de pacientes a un hospital. $P(a \leq X \leq b)$ es el área de la gráfica de la función de densidad de probabilidad.

Terminología y conceptos: distribución acumulada

- La función de distribución acumulada $F(x)$ indica la probabilidad de que la v.a. X tome un valor menor o igual que x, es decir $F(x) = P(X \leq x)$.

- Si X es discreta, se define como $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$.

- Si X es continua, se define como $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

- Propiedades: F es no decreciente, los límites en $-\infty$ y $+\infty$ son 0 y 1, respectivamente.

Terminología y conceptos: valor esperado

- El valor esperado de una variable aleatoria discreta X es $E(X) = \sum_{\forall i} x_i p(x_i)$.

- El valor esperado de una variable aleatoria continua X es $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

- $E(X)$ también se denota como μ (media) y se conoce como primer momento de X. El n_ésimo momento $E(X^n)$ se define de forma análoga, elevando a la n el primer factor del producto en la sumatoria (para el caso discreto) o integral (para el caso continuo).

- La varianza de X se define como $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E[(X)]^2$. También se denota mediante $var(X)$ o σ^2.

Terminología y conceptos: valor esperado y varianza

- El valor esperado es una medida de la tendencia central de la v.a.

- La varianza mide el valor esperado del cuadrado de la diferencia entre la v.a. y su valor esperado, dando una idea de la dispersión o variación de los valores posibles de X alrededor de la media $E(X)$.

- La desviación estándar σ es la raíz cuadrada de la varianza. Por lo tanto, la media y la desviación estándar están expresadas en las mismas unidades.

Distribuciones discretas: ejemplo

Distribución de Poisson:

- Función de probabilidad: $p(x) = \frac{e^{\alpha}\alpha^{x}}{x!}$ para $x = 0, 1, \ldots$ con $\alpha > 0$.

- Función de probabilidad acumulada: $F(x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{e^{\alpha}\alpha^{i}}{i!}$

- Propiedad: $E(X) = \alpha = V(X)$.

- Posibles aplicaciones: cantidad de arribos en un determinado horizonte horario, cantidad de faltas de ortografía en una cantidad determinada de páginas, ... cantidad de muertes por patadas de caballos en un ejército del siglo XIX.

Otras distribuciones discretas

- Uniforme discreta: Todos los valores tienen la misma probabilidad.
- Bernoulli: Varios ensayos donde el resultado de cada uno puede ser suceso o falla.
- Binomial: Número de sucesos en varios ensayos Bernoulli.
- Geométrica: Número de ensayos Bernoulli para lograr el primer suceso.

Distribuciones continuas: ejemplo

Distribución exponencial negativa:

- Función de probabilidad: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ con $x \geq 0$.
- Función de distribución: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.
- Propiedades: $E(X) = 1/\lambda$ y $V(X) = 1/\lambda^2$. La media es igual a la desviación estándar.
- Posibles aplicaciones: Arribos completamente aleatorios, tiempos de servicio altamente variables (λ es la tasa, eventos por unidad de tiempo). Tiempo de vida de componentes, sin memoria.

Otras distribuciones continuas

- Uniforme continua: La probabilidad de dos intervalos cualesquiera de igual largo es la misma.
- Normal y Lognormal: Sin y con sesgo, diferentes rangos de valores.
- Triangular: Útil cuando hay pocos datos.
- Beta, Gamma, Erlang, Weibull: Algunas son generalizaciones de otras distribuciones.

Procesos de Poisson

- Eventos que pueden describirse por una función de conteo $N(t)$ que representa la cantidad de eventos ocurridos en el intevalo $[0, t]$.

- El proceso es de Poisson con tasa λ si se cumple:

  1. Los arribos ocurren uno por vez.
  2. $\{N(t), t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios. La cantidad de eventos depende del intervalo y no del instante donde ocurren.
  3. El proceso tiene incrementos independientes. La cantidad de eventos en intervalos disjuntos son v.a. independientes.

- Un proceso de Poisson cumple $P[N(t) = n] = \frac{e^{\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$. Notar que es la distribución de Poisson con $\alpha = \lambda t$.

Procesos de Poisson: propiedades

- El tiempo entre dos arribos consecutivos de Poisson tiene distribución exponencial negativa de tasa λ.

- *Split*: Un proceso de Poisson con tasa λ donde cada arribo luego se clasifica en tipo I con probabilidad p y tipo II con probabilidad $(1-p)$ es equivalente a dos procesos de tasas λp y $\lambda(1-p)$, respectivamente.

- *Merge*: La combinación de dos procesos de Poisson de tasas λ_1 y λ_2, respectivamente, es un proceso de Poisson de tasa $\lambda_1 + \lambda_2$.

- Proceso de Poisson *no estacionario*: No cumple con la condición 2 de la definición, la tasa depende del tiempo $(\lambda(t))$. Es posible transformar a un nuevo proceso de Poisson.

Distribuciones empíricas

- Representación directa de datos observados. No necesariamente deben tener una forma regular como las distribuciones teóricas parámetricas.

- Variante discreta y continua.

- Ejemplo de distribución empírica (discreta) del tiempo de estadía en el hospital (histograma de frecuencias y distribución acumulada).