Optimización Continua y Aplicaciones (OCA)

(Obligatorio 4)

Fundamentos de Optimización con Restricciones

Claudio Risso, Pablo Rodríguez Bocca

17 de octubre de 2023

El objetivo de este obligatorio es repasar los conceptos teóricos de la optimización con restricciones en $\mathbb{R}^n$. En la primera mitad se desarrollan en forma autocontenida las formulaciones Primal-Dual y Kuhn-Tucker para la programación lineal, para concluir que el Lema de Farkas-Minkowski es una consecuencia directa de esas propiedades. Posteriormente se aplicará la teoría extendida a un problema no-lineal.

1 Dualidad en Programación Lineal y KKT

Considere $(P)\begin{cases} \min f(x) = c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$ y $(P_\lambda)\begin{cases} \min f_\lambda(x) = b^T\lambda + (c - A^T\lambda)^T x \\ x \geq 0 \end{cases}$.

a) Verificar que (P_λ) es una relajación de (P) cuando $\lambda \geq 0$, que (P_λ) está acotado inferiormente sii $A^T\lambda \leq c$, y que de cumplirse lo anterior, el óptimo $\Phi(\lambda)$ de (P_λ) es $b^T\lambda$.

   Concluya que la expresión del dual de (P) es $(D)\begin{cases} \max \Phi(\lambda) = b^T\lambda \\ A^T\lambda \leq c \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$.

   Verifique que el dual de (D) es el mismo (P) reduciendo el segundo a la forma canónica y aplicando la propiedad antes probada.

b) Si un problema (P) factible no es acotado inferiormente ¿Qué puede decirse de la factibilidad de su dual (D)? ¿Qué pasa si (D) es factible pero no es acotado superiormente?

c) Deduzca que si tenemos $\bar{x}$ y $\bar{\lambda}$, óptimos de (P) y (D) respectivamente, entonces se cumplen las condiciones de complementaridad y eso implica $\Phi(\bar{\lambda}) = f(\bar{x})$, esto es, el *duality-gap* es 0 (recíproco de la Dualidad Débil). Análogamente, si se cumple la Dualidad Débil en dos soluciones factibles de (P) y (D), ellas son óptimas y se cumple la complementaridad ¿Equivale esto a que KKT sea necesario y suficiente en el caso lineal?

d) El Algoritmo Simplex consta de dos etapas para resolver (en tiempo finito) un problema (P). En la primera se encuentra un vértice factible, si es que éste existe. En la segunda se parte de ese vértice y se sigue un recorrido descendente de vértices, salvo que desde uno de ellos se pueda descender indefinidamente sin pasar a un vértice nuevo.

   Muestre que si el problema (P) es factible y acotado inferiormente, entonces: i) (P) tiene óptimo y ii) se cumple la Dualidad Fuerte. Encuentre un ejemplo con funciones convexas donde lo anterior no sea verdad.

e) Extendiendo las propiedades anteriores y tomando como referencia el problema $(P) \begin{cases} \max c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ pruebe el Lema de Farkas-Minkowski.

2 Optimización Primal-Dualidad Convexa

Considere el problema de dos empresas `A` y `B`, clientes de otra compañía `C`, la cual es proveedora de un suministro no-stockeable. `A` y `B` son los únicos clientes de `C`. A efectos gráficos, pensemos que `C` produce diariamente un insumo perecedero esencial para sus clientes, que caduca a las 24h; por lo que es vital coordinar la producción de `C` con el consumo `A` y `B`. En este ejercicio, asumimos que se planifica "producción y consumo" para la siguiente semana hábil (i.e., 5 días).

Para atender la demanda d_t de un día t cualquiera, `C` incurre en un costo de producción $k \cdot d_t^2$. La constante k es irrelevante para el problema y podemos asumir sin pérdida de generalidad que vale $\$1/\text{uni}^2$. El cliente `A` no tiene mínimos diarios de consumo, pero su funcionamiento demanda 25 unidades por semana del insumo producido por `C`. En cambio, atender a `B` requiere un mínimo de 2 unidades diarias, para un consumo semanal total de 15.

a) Plantee la realidad anterior como un problema de programación matemática en función de las variables: x_t (demanda diaria de `A`) y y_t (demanda diaria de `B`), asumiendo que el horizonte es una semana $1 \leq t \leq 5 = T$.

b) Resuelva el problema numéricamente haciendo uso de `quadprog` de `Matlab`.

c) Interprete la solución anterior y verifique que es óptima mediante las condiciones KKT.

d) ¿Cuál es el precio marginal de equilibrio que `C` debería cobrarle a `A` y a `B` en las condiciones anteriores? ¿Cómo cambia la respuesta anterior si la entrega de cada unidad a `A` tiene un costo logístico adicional de \$1?

e) <u>Opcional 1</u>: Proponga un algoritmo Primal-Dual de optimización para resolver la parte a) de este problema relajando las restricciones de igualdad. En la resolución del Problema Relajado, puede usarse `quadprog` de `Matlab`. En la maximización del Dual se implementará ascenso por gradiente y búsqueda lineal con regla de Armijo.

   <u>Opcional 2</u>: Resuelva el problema de la parte a) haciendo uso de un método iterativo basado en el gradiente proyectado sobre el conjunto de igualdades. Tenga en cuenta las precauciones adicionales por las cotas en las variables, como las vistas en clase.