Universidad de la República **CDIV-2S 2023**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Teórico nocturno**

Nota sobre la existencia de $\sqrt{2}$

En estas notas (de lectura opcional) mostramos como se puede probar la existencia de un real positivo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = 2$ (que lo denotamos por $\sqrt{2}$) usando el axioma de completitud. En clase probamos que no existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 = 2$ por lo que como corolario obtenemos la existencia de números irracionales.

Idea de la prueba: Consideramos el conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$. Claramente X es no vacío ($1 \in X$ pues $1^2 = 1 \leq 2$) y acotado superiormente por 2 (si 2 no fuera cota superior, debería existir $x \in X$ tal que $2 \leq x$, pero entonces tendríamos que $4 = 2^2 \leq x^2 \leq 2$ lo cuál es absurdo). Por el axioma de completitud, existe el supremo $s = \sup(X)$ y que además verifica $1 \leq s \leq 2$ (pues $1 \in X$ y 2 es cota superior). La prueba consiste en probar que $s^2 = 2$ y usaremos la siguiente propiedad probada en clase:

Propiedad arquimediana de los reales: Si x, y son reales con $x > 0$ entonces $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $nx > y$.

Teorema. Existe un real $s > 0$ que verifica $s^2 = 2$.

Demostración. Consideramos el conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$. Como X es no vacío y acotado superiormente entonces existe $s = \sup(X)$. Por tricotomía tenemos tres posibilidades: $2 - s^2 > 0$, $s^2 - 2 > 0$ o $s^2 - 2 = 0$. Vamos a ver que las primeras dos opciones nos lleva a una contradicción:

$\boxed{\text{Si } 2 - s^2 > 0\text{:}}$ Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $s + \frac{1}{n} > s = \sup(X) \Rightarrow s + \frac{1}{n} \notin X \Rightarrow (s + \frac{1}{n})^2 > 2$.
Por el teorema del binomio, $s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} > 2 \Rightarrow \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} > 2 - s^2 \Rightarrow 2s + \frac{1}{n} > n(2 - s^2)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.
Pero por la Propiedad arquimediana, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n(2 - s^2) > 2s + 1 \geq 2s + \frac{1}{n}$ ABSURDO!

$\boxed{\text{Si } s^2 - 2 > 0\text{:}}$ Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene $s - \frac{1}{n} < s = \sup(X) \Rightarrow \exists x \in X : s - \frac{1}{n} < x \Rightarrow (s - \frac{1}{n})^2 < x^2 \leq 2$. Por el teorema del binomio, $s^2 - \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} < 2 \Rightarrow s^2 - 2 < \frac{2s}{n} - \frac{1}{n^2} \Rightarrow n(s^2 - 2) < 2s - \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.
Pero por la Propiedad arquimediana, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n(s^2 - 2) > 2s > 2s - \frac{1}{n}$ ABSURDO!

Luego $s^2 - 2 = 0$, o sea $s^2 = 2$ como queríamos probar.

Ejercicio. Sea $r > 0$. Probar que existe un real $s > 0$ que verifica $s^2 = r$.