Veamos que si $\bar{x}^k \neq x^k$ (no es estacionario), entonces tenemos una dirección factible de descenso.

Sea entonces x^k, y $\bar{x}^k = P_X(x^k - s^k \nabla f(x^k))$ $\quad \bar{x}^k \neq x^k$

Por la condición de optimalidad de la proyección, tenemos:

$$\langle \bar{x}^k - x^k + s^k \nabla f(x^k), z - \bar{x}^k \rangle \geq 0 \quad \forall z \in X.$$ En particular si tomamos $z = x^k$

$$\langle \bar{x}^k - x^k + s^k \nabla f(x^k), x^k - \bar{x}^k \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle \bar{x}^k - x^k, x^k - \bar{x}^k \rangle + \langle s^k \nabla f(x^k), x^k - \bar{x}^k \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad -\|\bar{x}^k - x^k\|^2 \geq \langle s^k \nabla f(x^k), \bar{x}^k - x^k \rangle$$

Como $\bar{x}^k \neq x^k \Rightarrow \|\bar{x}^k - x^k\| > 0 \Rightarrow \langle s^k \nabla f(x^k), \bar{x}^k - x^k \rangle < 0$

Elección de α^k y s^k

- Regla de Minimización Limitada

  Dejamos $s^k = s$ constante y $\alpha^k \in (0,1]$ para que:

  $$f(x^k + \alpha^k(\bar{x}^k - x^k)) = \min_{\alpha \in (0,1]} f(x^k + \alpha(\bar{x}^k - x^k))$$

- Paso constante

  Dejamos ambos pasos constantes: $s^k = s$ y $\alpha^k = 1 \quad \forall k$

  Se puede probar convergencia a un punto estacionario si ∇f es Lipschitz y s es suficientemente chico.

- Paso decreciente

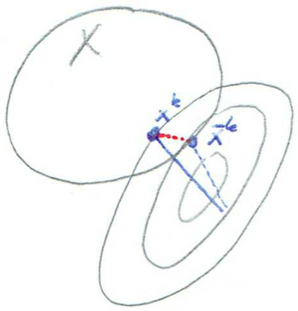
  Dejamos $\alpha^k = 1 \quad \forall k$ y $s^k \to 0$ con $\sum s^k = \infty$

- **Armijo sobre la dirección factible**

Dejamos $s^k = s$ constante y elegimos $\alpha^k \in (0,1]$ según Armijo:

Fijados $\beta, \tau \in (0,1)$, incrementamos $m \in \mathbb{N}$ hasta que:

$$f(x^k) - f(x^k + \beta^m(\bar{x}^k - x^k)) \geq -\tau \beta^m \nabla f(x^k)^T (\bar{x}^k - x^k)$$



- **Armijo sobre el Arco de proyecciones**

Fijamos $\alpha^k = 1$ y elegimos s^k siguiendo la regla de Armijo.

Dados $\beta, \tau \in (0,1)$ y s_0 paso inicial, probamos con pasos $s = \beta^m s_0$ $m = 1, 2, \ldots$ hasta que:

$$f(x^k) - f(z(\beta^m s_0)) \geq -\tau \nabla f(x^k)^T (z(\beta^m s_0) - x^k)$$

donde $z(\beta^m s_0) = P_X(x^k - \beta^m s_0 \nabla f(x^k))$