Práctico 4: Variable aleatoria y función de distribución

Ejercicio 1
Sea X una variable aleatoria (v.a.) que toma los valores $\{-2, -1, 1, 1.5, 5\}$ con probabilidades $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}$ respectivamente. Graficar su función de distribución.

Ejercicio 2
Se consideran las funciones $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

1. $$F(x) = \begin{cases} \beta e^x & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \alpha \frac{x}{1+x} & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

   Hallar α y β para que F sea una función de distribución.

2. $$F(x) = \begin{cases} \alpha + e^x & \text{si } x \leqslant -1 \\ \beta x + \gamma & \text{si } -1 < x \leqslant 1 \\ \delta + \varepsilon x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

   Hallar α, β, γ, δ, ε para que F sea una función de distribución.

Ejercicio 3
Se considera la función de distribución $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la variable aleatoria X. Probar que:

1. $\mathbf{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$
2. $\mathbf{P}(X = a) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$
3. $\mathbf{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$
4. $\mathbf{P}(a < X < b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x) - F_X(a)$
5. $\mathbf{P}(a \leqslant X < b) = \lim\limits_{x \to b^-} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$
6. $\mathbf{P}(X > a) = 1 - F_X(a)$
7. $\mathbf{P}(X \geqslant a) = 1 - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$

Ejercicio 4
Se considera una variable aleatoria X cuya función de distribución es:

1. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ 1/4 & \text{si } -3 \leqslant x < 1 \\ 3/4 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$

   Calcular:

   a) $\mathbf{P}(-3 \leqslant X \leqslant 1)$
   b) $\mathbf{P}(-3 < X \leqslant 1)$
   c) $\mathbf{P}(-3 \leqslant X < 1)$
   d) $\mathbf{P}(-3 < X < 1)$

e) $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$

f) $\mathbf{P}(-1 < X < 0)$

2. $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1/3 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ x/6 & \text{si } 2 \leqslant x < 4 \\ x/8 + 1/4 & \text{si } 4 \leqslant x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \leqslant x \end{cases}$

   Calcular:

   a) $\mathbf{P}(1 \leqslant X \leqslant 5)$

   b) $\mathbf{P}(2 < X \leqslant 4)$

   c) $\mathbf{P}(0 < X < 1)$

   d) $\mathbf{P}(4 \leqslant X < 6)$

Distribuciones discretas

Ejercicio 5 (Distribución binomial)
La distribución introducida en este ejercicio se denomina *distribución binomial.*

1. Se considera el natural $n \geq 1$, $0 < p < 1$ y el conjunto $A = \{0, 1, ..., n\}$. Probar que la función $p : A \to \mathbb{R}$ tal que $p(k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$ con $k \in A$ define una probabilidad en A.
   Sugerencia: utilizar el binomio de Newton.

2. En la trasmisión de un mensaje compuesto por signos, la probabilidad de que ocurra un error en un signo es 0,1. Calcular la probabilidad de que, en un mensaje con 4 signos:
   (a) no hayan errores;
   (b) ocurra un error;
   (c) ocurra no menos de un error.

3. Un trabajador controla 5 máquinas de un mismo tipo. La probabilidad de que una máquina requiera la atención del trabajador en el lapso de una hora es 1/3. Calcular la probabilidad de que, en el curso de una hora, el trabajador sea requerido por:
   (a) 2 máquinas;
   (b) no menos de 2 máquinas.

4. El sistema electrónico de dirección de un cohete funciona correctamente con una probabilidad p cuando se pone a funcionar. Se quiere instalar n sistemas de respaldo independientes, pero idénticas, en el cohete de modo que la probabilidad de que al menos un sistema trabaje en forma correcta no sea menor que 0,99. Hallar la cantidad n de sistemas electrónicos de dirección que se necesitan para satisfacer los requerimientos si $p = 0{,}9$ y si $p = 0{,}8$.

5. Graficar la función de distribución y la función de probabilidad de una variable aleatoria con distribución $\mathrm{Bin}(6, 0.25)$.

Ejercicio 6
Diremos que θ es una *moda* de la variable aleatoria discreta X si y sólo si se cumple que:

$$\mathbf{P}(X = \theta) = p_X(\theta) \geq p_X(x) = \mathbf{P}(X = x) \quad \forall x \in R_X$$

Sea $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

1. Probar que:

$$\frac{p_X(k)}{p_X(k-1)} = 1 + \frac{(n+1)p - k}{(1-p)k} \quad k = 1, \dots, n$$

2. Calcular la(s) moda(s) de X discutiendo según p.

   Sugerencia: estudiar el cociente de la parte anterior y compararlo con 1.

Ejercicio 7 (Distribución hipergeométrica)
La distribución introducida en este ejercicio se denomina *distribución hipergeométrica.*

1. Se consideran los números naturales N, D y n tales que $N \geq D$. La variable hipergeométrica permite modelar la siguiente situación: suponga que se tiene una población de N elementos, de los cuales D pertenecen a cierta categoría de interés y $N-D$ no pertenecen. Se toma una muestra al azar y sin reposición de tamaño n. La distribución hipergeométrica mide la probabilidad de obtener k elementos de la categoría de interés en la muestra tomada, con $k \in \{0, 1, \ldots, \text{mín}(D, n)\}$.

   Probar que la función $p : \{0, 1, \ldots, \text{mín}(D, n)\} \to \mathbb{R}$ tal que $p(k) = \frac{C_k^D C_{n-k}^{N-D}}{C_n^N}$ define una probabilidad. *Sugerencia:* Usar que $\sum_{k=0}^{n} C_k^D C_{n-k}^{N-D} = C_n^N$.

2. Una empresa quiere comprar cajas que contienen 40 herramientas cada una. El procedimiento de control de calidad de cada caja consiste en tomar una muestra de 5 herramientas al azar de dicha caja y rechazarla si se encuentra una herramienta defectuosa. Si la caja a inspeccionar tiene 3 defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de rechazar la caja?

3. Ahora de un lote de 10 herramientas se seleccionan 4 al azar. Si el lote contiene 3 herramientas con defectos de fabricación, calcular la probabilidad de que:

   a) las 4 funcionen.

   b) al menos 2 no funcionen.

   c) sólo una funciona.

   d) por lo menos una funciona.

Ejercicio 8 (Distribución Poisson)
En los siguientes ejercicios se asume que los fenómenos se comportan según la *distribución de Poisson*, dada por:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \Leftrightarrow p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots \qquad (\lambda > 0)$$

Típicamente, la distribución Poisson expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media (λ), la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto período de tiempo.

1. Verificar que $p_X : \mathbb{N} \to [0, 1]$ define una probabilidad.

2. El número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador durante un milisegundo en un experimento de laboratorio es 4. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un milisegundo determinado?

3. Se sabe que 10 es el número promedio de camiones-tanque de aceite que llegan por día a una cierta ciudad portuaria. Las instalaciones del puerto pueden atender cuando mucho a 15 camiones-tanque en un día. ¿Cuál es la probabilidad de que en un determinado día se tengan que regresar algunos de los camiones-tanque?

4. Se certifica la calidad de discos de computadora pasándolos por un certificador que cuenta el número de sectores defectuosos. Una determinada marca de discos tiene un promedio de $0,1$ sectores defectuosos por disco. Calcular la probabilidad de que:

   a) un disco que se inspeccione no tenga sectores defectuosos.

   b) un disco que se inspeccione tenga más de un sector defectuoso.

   c) dos discos que se inspeccionen no tengan sectores defectuosos.

Ejercicio 9 (Distribución geométrica)
Se considera $0 < p < 1$ y $R_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ los enteros positivos.

1. Probar que $p_X : R_X \to [0, 1]$ dada por $p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$ es una función de probabilidad. Si una variable aleatoria discreta X tiene por función de probabilidad p_X como antes se dice que X tiene *distribución Geométrica* de parámetro p y se denota $X \sim \text{Geo}(p)$.

2. Consideramos un experimento aleatorio donde nos interesa estudiar la ocurrencia o no de un suceso A con probabilidad p $(0 < p < 1)$. Cada vez que ocurre A diremos que hay *éxito* y cada vez que ocurre A^c diremos que hay *fracaso*. Repetimos el experimento en forma independiente (es decir lo que ocurre en una repetición no influye en las otras) hasta obtener éxito (ocurre A). Sea X una variable aleatoria que cuenta la cantidad de repeticiones. Calcular $\mathbf{P}(X = k)$ con $k \in \mathbb{N}$ (la probabilidad de tener que realizar k repeticiones para obtener un éxito) y deducir que $X \sim \text{Geo}(p)$.

3. *Pérdida de memoria:* Probar que $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ se verifica que:
$$\mathbf{P}(X > m + n | X > m) = \mathbf{P}(X > n).$$
Es decir, si en el paso m no tuvimos éxito, es como que empezáramos nuevamente.

4. El tablero de un conmutador telefónico es de muy poca capacidad en cuanto al tiempo de ocupado se refiere, de tal forma que las personas no pueden encontrar una línea desocupada para sus llamadas.

   Puede ser de interés saber el número de intentos necesarios que se requieren para tener una línea disponible. Suponga que $p = 0{,}05$ es la probabilidad de tener línea durante la mayor congestión de llamadas. Se tiene el interés particular de saber la probabilidad de que sean necesarios 5 intentos para lograr una comunicación.

Ejercicio 10 (Distribución binomial negativa)
Sea X el número de intentos independientes (de un experimento aleatorio) que hay que realizar para observar por k-ésima vez ($k \geq 1$) el suceso A, con $\mathbf{P}(A) = p$.

1. Hallar la distribución de X. Esta distribución se llama *Binomial Negativa* de parámetros k y p y se escribe $X \sim \text{BN}(k, p)$

2. En una población con 100000 personas donde 1800 son portadores de una enfermedad, se realiza un muestreo con reposición donde se puede suponer equiprobabilidad. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una muestra con 4 enfermos sin tener que seleccionar más de 8 personas?

3. Hallar la probabilidad de que una persona que lanza al aire tres monedas obtenga ya sea sólo caras o sólo cruces por segunda ocasión en el quinto lanzamiento.

4. Si $X_1, X_2, \ldots X_k\, iid \sim \text{Geo}(p)$, hallar la distribución de $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$.

Ejercicio 11 (Aproximación de una Binomial por una Poisson)

1. Considere una variable aleatoria binomial $X \sim Bin(n, p_n)$ con $n \to +\infty$ y tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$ $(0 < \lambda < \infty)$. Probar que
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k.$$
Es decir, en estas condiciones (n grande y p pequeño) la distribución Binomial se puede aproximar por una Poisson de parámetro $\lambda = np$.
Sugerencia: usar la fórmula de Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$.

2. La probabilidad de acertar en un blanco es de 0,001. Calcular la probabilidad de acertar en el blanco dos o mas veces, en una serie de 5000 disparos.