Clase 6 - Axiomas de los reales (Parte 3)

Def. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$.

- s es <u>cota superior</u> de X si $\forall x \in X : x \leq s$.
- s es <u>máximo</u> de X si $s \in X$ y $x \leq s$, $\forall x \in X$.
- s es <u>supremo</u> de X si s es la menor cota superior.

- s es <u>cota inferior</u> de X si $\forall x \in X : x \geq s$.
- s es <u>mínimo</u> de X si $s \in X$ y $x \geq s$, $\forall x \in X$.
- s es <u>ínfimo</u> de X si s es la mayor cota inferior.

<u>Ejemplo</u>: $X = [0,1] \cup (2,3)$

cotas superiores: Cualquier $s \geq 3$
$\max(X) =$ no tiene
$\sup(X) = 3$

cotas inferiores: Cualquier $s \leq 0$.
$\min(X) = 0$
$\inf(X) = 0$

Ejemplo: $X = \mathbb{N}$

cotas superiores: No tiene
$\max(X) =$ " "
$\sup(X) =$ " "

cotas inferiores: Cualquier $s \leq 0$
$\min(X) = 0$
$\inf(X) = 0$

Ejemplo: $X = (0, +\infty)$

cotas superiores: No tiene
$\max(X) =$ " "
$\sup(X) =$ " "

cotas inferiores: Cualquier $s \leq 0$
$\min(X) =$ No Tiene
$\inf(X) = 0$

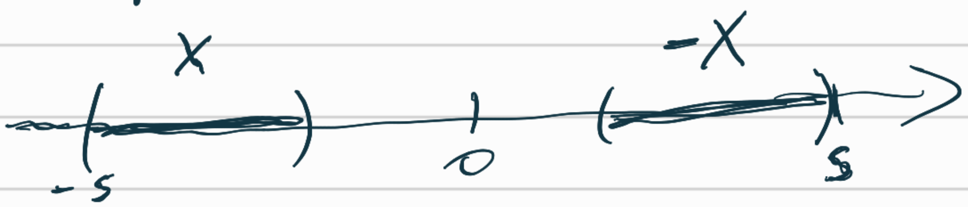
Def. X está acotado superiormente si posee cotas superiores.
X " " inferiormente " " " inferiores.

Axioma de completitud

Axioma 10: Todo conjunto no vacío $X \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente tiene supremo.

Teo: Todo conjunto no vacío $X \subseteq \mathbb{R}$ acotado inferiormente tiene ínfimo.

Dem.



Consideramos $-X := \{-x : x \in X\}$

$X \neq \phi \Rightarrow -X \neq \phi$

X acotado inferiormente $\Rightarrow -X$ acotado superiormente

Por axioma 10, existe $s = \sup(-X) \Rightarrow -s = \inf(X)$.

Teo. $\mathbb{Z}^+$ no está acotado superiormente.

Dem. Por absurdo, supongamos que $\mathbb{Z}^+$ están acotados superiormente.

Como $1 \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \mathbb{Z}^+ \neq \phi$

Por axioma 10, $\exists\, s \in \mathbb{R} \,/\, s = \sup(\mathbb{Z}^+)$

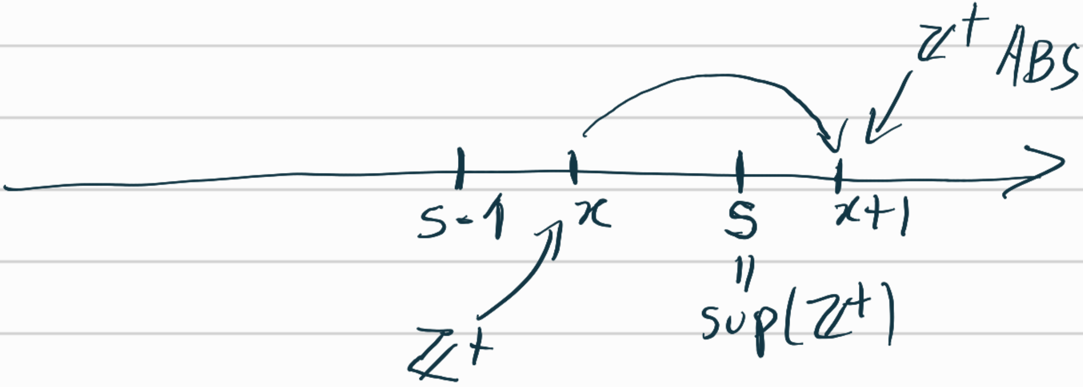
Como $s-1 < s = \sup(\mathbb{Z}^+) \Rightarrow s-1$ no es cota superior $\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{Z}^+ \,/\, x > s-1$

Como $\mathbb{Z}^+$ es inductivo $\Rightarrow x+1 \in \mathbb{Z}^+$

Pero $x > s-1 \Rightarrow x+1 > s = \sup(\mathbb{Z}^+)$

lo cual es absurdo.

Luego $\mathbb{Z}^+$ no está acotado superiormente.



<u>Teo.</u> $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}^+ / n > x$

<u>Dem.</u> Por absurdo, si $\exists x \in \mathbb{R} / x \geq n \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$
$\Rightarrow \mathbb{Z}^+$ estaría acotado superiormente
ABSURDO!

<u>Teo</u> (Propiedad arquimediana):
Si $x > 0$, $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}^+ : nx > y$.

<u>Dem.</u> Por el teo. anterior sabemos que existe $n \in \mathbb{Z}^+ / n > y/x$

$$\underset{x>0}{\Rightarrow} \quad n.x > (y/x).x = y.$$

<u>Teo</u> Sean $a, x, y \in \mathbb{R}$. Si $a \leq x \leq a + \frac{y}{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
$\Rightarrow x = a$.

<u>Dem.</u> Por absurdo, supongamos que $a < x$.

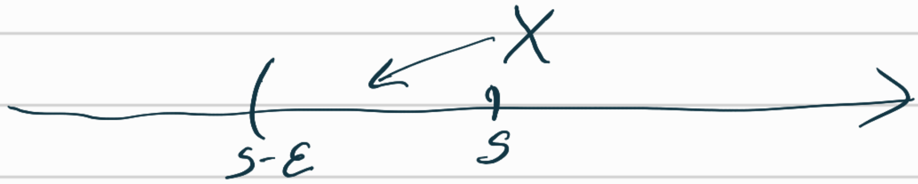
$$x \leq a + y/n \Leftrightarrow x - a \leq y/n$$
$$\Leftrightarrow n(x-a) \leq y \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Por la prop. arquimediana $\exists n \in \mathbb{Z}^+ /$
$n(x-a) > y$ (usamos que $a < x$) $\lightning$

Propiedad fundamental del supremo e ínfimo

Teo. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y s una cota superior de X.

$$s = \sup(X) \iff \forall \varepsilon > 0,\ X \cap (s-\varepsilon, s] \neq \phi$$



Dem. ($\Rightarrow$) Por absurdo, supongamos que $\exists \varepsilon > 0 /$
$X \cap (s-\varepsilon, s] = \phi$

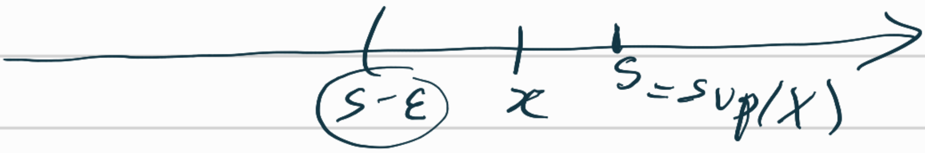
Como $s - \varepsilon < s = \sup(X)$

$\Rightarrow s - \varepsilon$ no es cota superior de X

$\Rightarrow \exists x \in X / x > s - \varepsilon$

Como $s = \sup(X) \Rightarrow x \leq s$.

Luego $x \in (s-\varepsilon, s] \cap X$. $\lightning$.



($\Leftarrow$) Como s es cota superior de X

$\Rightarrow \sup(X) \leq s$.

Por absurdo, si $\sup(X) < s$

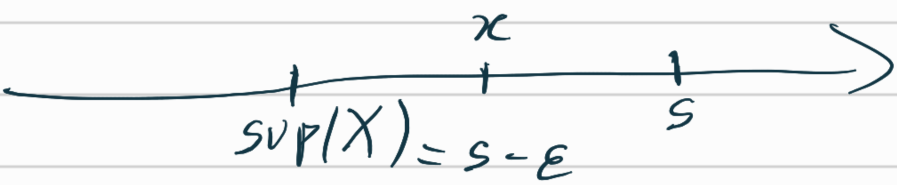
Tomamos $\varepsilon = s - \sup(X)$

Como $X \cap (s-\varepsilon, s] \neq \phi \Rightarrow x \in X /$

$s - \varepsilon < x \leq s$

$\Rightarrow x > s - \varepsilon = s - (s - \sup(X)) = \sup(X)$

lo cual es absurdo.



Teo. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y s una cota inferior de X.
$s = \inf(X) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ [s, s+\varepsilon) \cap X \neq \phi$

Teo: $\exists\ x \in \mathbb{R}\ /\ x^2 = 2$.

$S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$