# Bezout para Polinomios

**Teorema 1** (Identidad de Bezout para Polinomios)**.** *Sean* $k_1, k_2 \in k[x]$ *y* $d \in mcd(k_1, k_2)$*. Entonces:*

$$\exists p_1, p_2 \in k[x] : \;\; p_1 k_1 + p_2 k_2 = d$$

*Demostración.* Sean los siguientes conjuntos:

$$S = \{h \in k[x] : h = k_1\alpha + k_2\beta; \;\; \alpha, \beta \in k[x]\}$$

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n = grad(h); \;\; h \in S\}$$

Se nota que $S$ (y consecuentemente $A$) es no vacío, pues $k_1, k_2 \in S$.

Como $A \subseteq \mathbb{Z} \neq \emptyset$, $\exists m = \text{mín}\, A$, y además $\exists \alpha, \beta \in k[x]$ con $m = grad(\alpha k_1 + \beta k_2)$. Considere $d' = \alpha k_1 + \beta k_2$, y veamos que $d' \in mcd(k_1, k_2)$. Esto es $d' | k_1 p_1 + k_2 p_2, \;\; \forall p_1, p_2 \in k[x]$.

Si esto último no fuese así, entonces sería:

$$\begin{cases} k_1 p_1 + k_2 p_2 = d' q + r \\ r \neq 0 \;\; \wedge \;\; grad(r) < grad(d') \end{cases}$$

$$\Rightarrow r = (p_1 + \alpha q) k_1 + (p_2 + \beta q) k_2$$

Luego, se encontró un polinomio $r \in k[x]$ con $grad(r) < grad(d')$ y $r = k_1\psi + k_2\phi \in S$. Esto es absurdo, pues dijimos que $grad(d') = m = \text{mín}\, A$.

Luego, se puede decir que $d' | k_1$ y $d' | k_2$.

Si otro polinomio $h | k_1$ y $h | k_2$, entonces $h | (p_1\alpha + p_2\beta) = d'$ y $grad(h) \leq grad(d')$.

Luego, $d' \in mcd(k_1, k_2)$.

Además, si $d, d' \in mcd(k_1, k_2)$ se tiene que estos son múltiplos a menos de una constante, y luego existe un único polinomio mónico en $mcd(k_1, k_2)$ $\square$