Capítulo 2

Número real

2.1. Axiomas de cuerpo ordenado

1. Ordenar los siguientes números

   $a)$ para $p > 1$, ordenar los números $0, 1, p, p^2, \sqrt{p}, \dfrac{1}{p}$.

   $b)$ para $p \in (0, 1)$, ordenar los números $0, 1, p, p^2, \sqrt{p}, \dfrac{1}{p}$.

2. Determinar para qué valores de x son ciertas las siguientes inecuaciones.

   $a)$ $x^2 - 2x > 3$ $b)$ $x^2 + 4x + 1 \geq 0$ $c)$ $x(x-1)(x-2)(x-3) < 0$

   $d)$ $\dfrac{2-x}{1+x} \leq \dfrac{1+x}{2-x}$ $e)$ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} > 0$ $f)$ $\dfrac{x}{x-1} < \dfrac{2x+1}{x}$

   $g)$ $\sqrt{x+4} < x - 1$ $h)$ $\sqrt{x^2+1} > 2x - 3$

   $i)$ $|2x-5| < |3x+4|$ $j)$ $x^2 - 5|x| + 4 \geq 0$ $k)$ $3|x| - |x-2| > 2$

   $l)$ $\sqrt{x+n} - \sqrt{x} > 1$ con $n \in \mathbb{N}$ $m)$ $|nx| > x^2$ con $n \in \mathbb{N}$

3. **Medias** En este ejercicio se estudiarán distintos tipos de medias entre dos números. Sean a, b dos números reales tales que $0 < a < b$. Se definen las siguientes medias:

$A := \frac{a+b}{2}$	$G := \sqrt{ab}$	$H := \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$
Media aritmética	Media geométrica	Media armónica

   Demostrar que $a < H < G < A < b$.

Definimos ahora la media cuadrática como

$$C := \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Probar que $a < C < b$ y comparar C con las otras medias.

4. Bosquejar en el mismo par de ejes los siguientes conjuntos

$$a)\quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \qquad b)\quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$$

$$c)\quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|, |y|\} = 1\}$$

5. **Suma de conjuntos I**

   Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$ y $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

   a) Calcular αA para los siguietes ejemplos

   $$a)\quad \alpha = 2,\ A = \{0, 2, 4\} \qquad b)\quad \alpha = -1,\ A = \{-4, -1, 0, 1\}$$

   b) Calcular $A + B$ para los siguientes conjuntos

   $$c)\quad A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, \pi\} \qquad d)\quad A = \{0, 2, 3\},\ B = \{\sqrt{2}, \pi\}$$

   c) Calcular $\mathbb{Z} + \{-1, 2, 5\}$.

   d) Calcular $\mathbb{Z} + \{1, 2, \frac{5}{2}\}$.

   e) Dados $a, b, p \in \mathbb{R}$ con $a < b$ calcular $\{p\} + [a, b]$ y $\{p\} + (a, b)$.

2.2. Funciones reales

1. Bosquejar las siguientes funciones reales

$$a)\quad f(x) = x + |x + 1| \qquad b)\quad f(x) = |x| + |x + 1| \qquad c)\quad f(x) = 2x + |x + 1|$$

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = \text{signo}(x)$.

   Probar que $f \circ f = f$, $g \circ g = g$ y que $g \circ f = f \circ g$.

3. Sea $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ la función que se muestra en la pagina de EVA (Capítulo 2: Cálculo de imagen).

   Sea $f|_{[a,b]} : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función restricción de f al intervalo $[a, b]$, esto es $f|_{[a,b]}(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Calcular la imagen de $f|_{[a,b]}$ para los siguientes valores de a y b

$$a)\quad a = -3, b = 3 \qquad b)\quad a = -3, b = -2 \qquad c)\quad a = -3, b = 0 \qquad d)\quad a = 0, b = 2$$

4. **Funciones afines**

   Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *afín* si existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ tales que $f(x) = ax + b$.

   a) Verificar que si $b = 0$ entonces $f(x+z) = f(x) + f(z)$ y $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. Mostrar que ésto no es válido si $b \neq 0$.

   b) Probar que f es biyectiva y calcular su inversa.

   c) Decimos que dos funciones $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *conmutan* si para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $u(v(x)) = v(u(x))$. Determinar qué funciones afines conmutan con $f(x) = x + 2$. Repetir para $g(x) = 2x$ y $h(x) = 2x + 4$.

5. **Funciones monótonas (I)**

   Determinar, a partir de los axiomas de cuerpo ordenado, cuáles de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son estrictamente monótonas, monótonas o no son monótonas.

   a) $f(x) = x - 5$ *b*) $f(x) = -2x$ *c*) $f(x) = |x|$

   d) $f(x) = x^2$ *e*) $f(x) = x^3$

6. **Funciones convexas**

   Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función (donde I es un intervalo o $\mathbb{R}$), decimos que f es *convexa* si $\forall a, b \in I$, $\forall t \in [0,1]$ se cumple que $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$.

   En otras palabras, dados dos puntos del gráfico de f, si se traza el segmento de recta por ellos, el gráfico de f nunca está por arriba de dicho segmento.

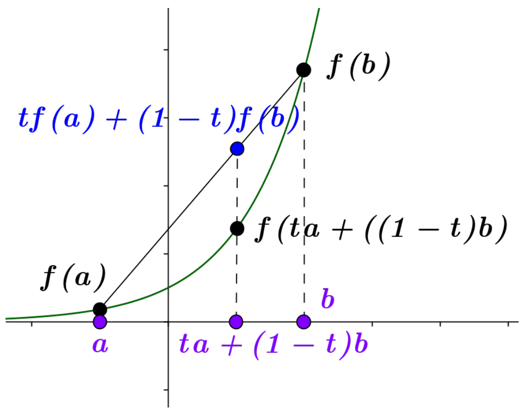

Figura 2.1: ejemplo de una función convexa

   a) Probar que la condición de convexidad es equivalente a la siguiente condición:

   Dados $a, b \in I$ con $a < b$ se cumple que $f(c) \leq f(a) + (c-a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ para todo c tal que $a \leq c \leq b$.

b) Determinar cuáles de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son convexas

a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = \sqrt{|x|}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 3x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Probar que si existen $a < b < c$ tales que $f(b) > f(a)$ y $f(b) > f(c)$, entonces f no es convexa. Dé un ejemplo de una función f convexa tal que existen $a < b < c$ donde $f(b) < f(a), f(b) < f(c)$

7. Construir una función biyectiva entre los siguientes intervalos:

a) $I = [0,5],\ J = [3,4]$ b) $I = (2,6),\ J = (0,1)$ c) $I = (1,4],\ J = [1,4)$

d) $I = (0,+\infty),\ J = \mathbb{R}$ e) $I = (0,2),\ J = \mathbb{R}$ f) $I = [1,2),\ J = [0,+\infty)$

g) $I = [0,1],\ J = [0,1)$

8. **Funciones lipschitzianas (I)**

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *lipschitziana* (o de Lipschitz) si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que para todo par $x, y \in I$ se cumple que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

Determinar cuáles de las siguientes funciones son lipschitzianas.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 7$
b) $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$
c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x$
e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \text{signo}(x)$

9. **Funciones lipschitzianas (II)**

Una interpretación de la propiedad de Lipschitz es que si una función es de Lipschitz, con constante de Lipschitz K, entonces para cada punto de la forma $(x_0, f(x_0))$ el gráfico de la función está entre la recta $y = K(x - x_0) + f(x_0)$ y la recta $y = -K(x - x_0) + f(x_0)$.

Ir a la pagina de EVA a la sección Capítulo 2: Visualización geométrica de funciones de Lipschitz, y determinar si esas funciones son funciones de Lipschitz y en caso de serlo determinar una constante K.

2.3. Axioma de completitud

1. Representar los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$, además hallar supremo e ínfimo y estudiar si son máximos y mínimos respectivamente.

   a) $[-1,1]$ *b*) $(2,5)$ *c*) $(2,6]$ *d*) $[-10,-2)$ *e*) $\{0\}$

   f) $[2,5]\cup[0,1]$ *g*) $[-1,1]\cap(0,2)$ *h*) $[0,5)\setminus(1,2)$ *i*) $[1,2]\setminus(1,2)$

   j) $([1,2]\cup[3,4])\cap[0,3]$ *k*) $[1,2]\cup([3,4]\cap[0,3])$

   l) $[1,3]\setminus([1,4]\setminus[2,3])$ *m*) $[1,4]\setminus([1,3]\setminus[2,3])$

2. Hallar supremo e ínfimo de los siguientes conjuntos y estudiar si son máximos o mínimos respectivamente.

   a) $\left\{x\in\mathbb{R} : x=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$ *b*) $\{\theta\in[0,10] : \cos(\theta)=\sin(\theta)\}$

   c) $\{\theta\in[0,10] : \cos(\theta)<\sin(\theta)\}$ *d*) $\{\theta\in[0,10] : \tan(\theta)<1\}$

   e) $\left\{x\in\mathbb{R} : x^2\leq 3\right\}$ *f*) $\{x\in\mathbb{R}^+ : (x-1)(x-2)<0\}$

   g) $\left\{x\in\mathbb{R} : \frac{3x+1}{x-2}\leq 0\right\}$ *h*) $\left\{x\in\mathbb{R} : \frac{2x+1}{x-3}\leq 0\right\}$

   i) $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ *j*) $[1,2]\cap\mathbb{Q}$ *k*) $\{x : x^2+x-1\leq 0\}\cap\mathbb{Q}$

3. Sean $A,B\subset\mathbb{R}$ no vacíos.

   a) 1) Si $A\subset B$ y B es acotado, demostrar que $\text{ínf}(B)\leq\text{ínf}(A)\leq\sup(A)\leq\sup(B)$.
      2) Dar un ejemplo en donde $A\subset B$, B sea acotado y además $\text{ínf}(B)=\text{ínf}(A)<\sup(A)<\sup(B)$.

   b) 1) Si $a\leq b$, $\forall a\in A$ y $\forall b\in B$, demostrar que $\sup(A)\leq\text{ínf}(B)$.
      2) Dar un ejemplo en donde $a<b$, $\forall a\in A$ y $\forall b\in B$, y $\sup(A)=\text{ínf}(B)$.

4. **Consecuencias básicas de la definición de supremo**

   a) Probar que el axioma de completitud (existencia de supremo para conjuntos no vacíos acotados superiormente) es equivalente a la siguiente propiedad: *"todo conjunto no vacíos acotado inferiormente tiene ínfimo"*.

   b) Sea A un conjunto no vacío, acotado superiormente y $\alpha=\sup(A)$. Probar que para todo $\delta>0$, existe $a_\delta\in A$ tal que $\alpha-\delta<a_\delta\leq\alpha$.

5. Sea $A\subset\mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado superiormente. Probar que si $\alpha=\sup(A)\notin A$ entonces A es infinito.

6. Sea $A=\left\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}^+\right\}$. Probar que A está acotado inferiormente. Notemos α al ínfimo de A.

a) Verificar que $\alpha \geq 0$.

b) Verificar que si α es una cota inferior entonces 2α también lo es.

c) Deducir que $\alpha = 0$. Deducir que para todo $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x > \frac{1}{n}$.

7. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$ probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

8. (Primer parcial, primer semestre 2016) Sea $A = \left\{\frac{m}{n} : 0 < m < n, m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Indicar la opción correcta.

   a) A está acotado superiormente, tiene supremo, pero no máximo.

   b) A no está acotado superiormente, por lo tanto no tiene supremo.

   c) A tiene supremo, que es máximo.

   d) A no está acotado superiormente, no tiene máximo, pero tiene supremo.

   e) A está acotado superiormente, pero no tiene supremo.

9. a) Probar que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente. Deduzca que para $x \in \mathbb{R}$, existen m y n enteros, tales que $m < x < n$.

   b) Dado $x_0 \in \mathbb{R}^+$ definimos el conjunto A_{x_0} como $A_{x_0} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{x_0}{n} \text{ para } n \in \mathbb{N}^+\}$. Probar que $\text{ínf}(A_{x_0}) = 0$.

   Deducir que para cualquier par de puntos $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$ existe $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.

10. **Suma de conjuntos II** (Las operaciones de suma y producto en conjuntos son las del Ejercicio 5.

    a) 1) Probar que si A y B son acotados, entonces $\text{ínf}(A+B) = \text{ínf}(A) + \text{ínf}(B)$ y $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

       2) Si $A = (0,2]$ y $C = (0,3]$, encontrar un conjunto B tal que $A + B = C$. Verificar con estos conjuntos A y B las igualdades demostradas en el item anterior.

    b) 1) Probar que si A es acotado y $\alpha > 0$, entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ e $\text{ínf}(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}(A)$.

       2) Probar que si A es acotado y $\alpha < 0$, entonces $\sup(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}(A)$ e $\text{ínf}(\alpha A) = \alpha \sup(A)$.

11. **Topología I**

    Se dice que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *abierto*, si para todo $a \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset A$.

    Se dice que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es *cerrado* si A^c es abierto.

    a) Probar que $A = (a, b)$ es abierto.

    b) Probar que $A = [a, b]$ es cerrado, en particular $A = \{0\}$ es cerrado.

c) Probar que $A = [0,1)$ no es abierto ni cerrado.

d) Probar que $\mathbb{R}$ es abierto y cerrado.

e) Probar que si A, B son abiertos, entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ son abiertos. Repetir para A, B cerrados.

f) Probar que $\mathbb{N}$ es cerrado.

2.4. Funciones reales y axioma de completitud

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, es decir el mayor entero menor o igual a x.

   Bosquejar las funciones

   $$a)\quad f(x) \qquad b)\quad f_1(x) = x - f(x) \qquad c)\quad f_2(x) = \sqrt{f_1(x)} \qquad d)\quad f_3(x) = f(x) + f_2(x)$$

   $$e)\quad f_4(x) = f(x) + |x+1| \qquad f)\quad f_5(x) = f(x+1) + |2x|$$

   $$g)\quad f_6(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \qquad h)\quad f_7(x) = \frac{1}{f_6(x)}$$

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que los conjuntos $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ y $\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ están acotados.

   Fijo un intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, probar que

   $$\sup\{(f+g)(x) : x \in [a,b]\} \leq \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} + \sup\{g(x) : x \in [a,b]\}$$

   $$\text{ínf}\{(f+g)(x) : x \in [a,b]\} \geq \text{ínf}\{f(x) : x \in [a,b]\} + \text{ínf}\{g(x) : x \in [a,b]\}$$

   Dar ejemplos donde se cumplan las desigualdades estrictas.

   Dar un ejemplo de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ esté acotado y $f(x) < \sup(\text{Im}(f))$ para todo $x \in [a,b]$.

3. **Funciones monótonas (II)**

   a) Probar que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son estrictamente crecientes entonces $f \circ g$ y $g \circ f$ también lo son.

   b) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente, y $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$.
   Probar que el conjunto $\{f(x) : x \in [a,b]\}$ está acotado y además $\sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = f(b)$.
   Probar que se cumplen las siguientes desigualdades.

   $$\sup\{f(x) : x < a\} \leq f(a) \leq \text{ínf}\{f(x) : x > a\}$$

   Dé ejemplos donde las desigualdades sean estrictas.

4. **Funciones monótonas (III)**

   Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones monótonas crecientes.

   a) Verificar que $f \circ g$ y $f + g$ son monótonas crecientes. ¿Qué se puede decir de $f \times g$?

   b) Probar que la preimagen de f de un intervalo es un intervalo.

   c) Dar un ejemplo de una función monótona donde la imagen de un intervalo no es un intervalo.

5. **Definición de la función raíz cuadrada**

   En este ejercicio se definirá la función $f(x) = \sqrt{x}$.

   a) Sea $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $g(a) = a^2$. Probar que g es estrictamente monótona.

   b) Dado $x \in \mathbb{R}^+$, probar que el conjunto $A_x = \{a \in \mathbb{R} : a^2 \leq x\}$ está acotado superiormente.

   c) Definimos $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \sup(A_x)$. Probar que f es monótona creciente.

   d) Veamos ahora que $f(x)^2 = x$

      1) Probar que si $\alpha^2 < x$, entonces existe $h > 0$ tal que $(\alpha+h)^2 < x$. Deducir a $f(x)^2 \geq x$

      2) Probar que si $\alpha^2 > x$, entonces existe $h > 0$ tal que $(\alpha - h)^2 > x$. Probar que en este caso se verifica que $[\alpha - h, \alpha] \cap A_x = \emptyset$. Concluir que $f(x)^2 \leq x$.

      3) Deducir de lo anterior que $f(x)^2 = x$.

6. **Morfismos de Cuerpos**

   En este ejercicio se estudiará qué funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no nulas, verifican las siguientes propiedades

   $$f(x+y) = f(x) + f(y), \ f(xy) = f(x)f(y) \tag{2.1}$$

   En cada paso mencionar qué propiedad o parte anterior se usó.

   a) Probar que $f(0) = 0$.

   b) Probar que $f(1) = 1$.

   c) Para $n \in \mathbb{N}$, calcular $f(n)$.

   d) Para $p, q \in \mathbb{Z}$, con $q \neq 0$, calcular $f\left(\frac{p}{q}\right)$.

   e) Probar que $f(a^2) \geq 0$. Deducir que $f(a) > 0$ para todo $a > 0$.

   f) Probar que f es estrictamente creciente, esto es, que si $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$.

   g) Dado $x \in \mathbb{R}$, probar que los conjuntos $\{f(a) : x < a, a \in \mathbb{Q}\}$ y $\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\}$ están acotados inferior y superiormente respectivamente.

   Probar que $\sup\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\} \leq f(x) \leq \text{ínf}\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\}$.

h) Verificar que para $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $\sup\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\} = \text{ínf}\{f(a) : a < x, a \in \mathbb{Q}\}$. Deducir que $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

i) Dar funciones distintas de la identidad que cumplan una de las propiedades pero no la otra.

7. **Definición de la función potencia**

En este ejercicio se definirá la función $f(x) = 2^x$ y se probarán las propiedades básicas de la potencia.

a) Definimos $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por inducción como

- $f_1(1) = 2$
- $f_1(n+1) = 2f_1(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Probar que $f(n+m) = f(n)f(m)$ para todo par $n, m \in \mathbb{N}$.
2) Probar que la función f_1 es estrictamente creciente y $Im(f_1)$ no está acotada.

b) Para definir la función en los enteros simplemente invertimos. Sea $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_2(n) = \begin{cases} f_1(n) & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{f_1(n)} & \text{si } -n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) Probar que $f_2(n+m) = f_2(n)f_2(m)$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.
2) Probar que la función f_2 es creciente.

c) Veamos ahora cómo definir f en $\mathbb{Q}$, surge así el problema de las fracciones, por ejemplo $2^{\frac{1}{2}}$,

Sea $f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma: dado $\frac{p}{q}$ fracción irreducible $f_3\left(\frac{p}{q}\right) = \sup\{y \in \mathbb{R} : y^q \leq f_2(p)\}$.

1) Verificar que la función f_3 es una extensión de f_2, es decir $f_2(n) = f_3(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
2) Probar que $f_3(x+y) = f_3(x)f_3(y)$.
3) Probar que la función f_3 es estrictamente creciente.

d) Estamos ahora en condiciones de definir f como función real.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sup\{y \in \mathbb{R} : y = f_3(z) \text{ tal que } z \in \mathbb{Q}, z \leq x\}$$

1) Verificar que la función f está bien definida.
2) Probar que la función f es una extensión de f_3, es decir $f(x) = f_3(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$.
3) Probar que la función f es estrictamente creciente.
4) Probar que $f(x+y) = f(x)f(y)$.

5) Probar que dado $a \in \mathbb{R}$ se cumplen las igualdades $\sup\{f(x) : x < a\} = f(a) = \text{ínf}\{f(x) : x > a\}$.

e) Verificar que la definición se puede adaptar a cualquier base. Explique qué cambiaría para definir 3^x.

f) Dadas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^x$ probar que $f(x)g(x) = (ab)^x$.

2.5. Complementarios

1. Probar a partir de los axiomas de cuerpo que:

   a) El opuesto de 0 es 0 (es decir $-0 = 0$).

   b) El inverso de 1 es 1 (es decir $1^{-1} = 1$).

   c) El opuesto del opuesto de a es a (es decir $-(-a) = a$).

   d) $a \times 0 = 0$ para todo a.

   e) El opuesto de a por b es igual al opuesto de b por a, que es igual al opuesto del producto de a y b (es decir $-a(b) = -b(a) = -(ab)$).

2. A partir de los axiomas de cuerpo ordenado probar que:

   a) $1 > 0$.

   b) Para todo par de números a, b se tiene exactamente una de las siguiente propiedades $a < b$, $a = b$ o $a < b$.

   c) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

   d) Si $0 < a < b$ entonces $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

3. Sea $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ el polinomio definido por $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 3$. Definimos $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \frac{P(x)-P(1)}{x-1}$.

   Probar que f se puede extender a un polinomio, es decir existe $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomio, tal que $f(x) = Q(x)$ para todo $x \neq 1$.

4. **Funciones convexas II**

   Sea $f : I \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \text{signo}(x)$. Determinar si es convexa en los siguientes dominios.

   a) $I = [2, 3]$ *b*) $I = [-1, 1]$ *c*) $I = [0, 1]$ *d*) $I = [-1, 0]$

5. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ acotados y no vacíos, y tal que $A \setminus B$ es no vacío.

   a) Probar que $\sup(A \setminus B) \leq \sup(A)$.

b) Probar que si $\sup(B) < \sup(A)$ entonces $\sup(A \setminus B) = \sup(A)$.

c) De un ejemplo donde $\sup(B) = \sup(A)$ y $\sup(A \setminus B) < \sup(A)$.

d) De un ejemplo donde $\sup(B) = \sup(A)$ y $\sup(A \setminus B) = \sup(A)$.

6. Dados dos conjuntos no vacíos A, B, definimos $A - B = \{a - b, a \in A, b \in B\}$ y $A * B = \{ab, a \in A, b \in B\}$.

   Si A y B están acotados, calcular $\sup(A - B)$ en función del supremo e infimo de A y B.

   Si A y B están acotados, calcular $\sup(A * B)$ en función del supremo e infimo de A y B.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 1$, si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = 0$, si $x \notin \mathbb{Q}$.

   Calcular la imagen de f restricta al intervalo $[a, b]$ donde $a < b$.

8. Recordemos que la distancia entre dos puntos del plano $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ está dada por la fórmula $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$. Notamos la distancia entre A y B como $d(A, B)$

   A paritr de ésto se pueden definir distancias entre otros objetos geométricos.

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $P = (p_1, p_2)$ un punto, definimos la distancia entre $gr(f)$ (gráfico de f) y P como $\inf\{d(P, A) : A \in gr(f)\}$.

   a) Probar que si P pertenece al gráfico de f, entonces la distancia es 0.

   b) Calcular la distancia entre el gráfico de $f(x) = 3x + 1$ y el punto $P = (3, 0)$. Probar que existe $Q \in gr(f)$ tal que $d(P, Q)$ es igual a la distanicia entre $gr(f)$ y P. Trazar la recta entre P y Q e interpretar geométricamente el resultado.

   c) Dé un ejemplo de función f, y punto P tales que la distancia entre P y f sea 0 pero P no pertenezca al gráfico de f.

9.

   a) Probar que dado $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$ y $x \in \mathbb{Q}$, existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que $x < x + z < y$.

   b) Construir una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tal que $f(n) > 0$ para todo n y además $\displaystyle\sum_{i=0}^{N} f(i) < 10$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

10. **Topología II**

    Sea $A \subset R$, decimos que A *no es conexo* si existen U y V abiertos disjuntos y no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $A \subset U \cup V$, $A \cap V \neq \emptyset$ y $A \cap U \neq \emptyset$. En caso contrario se dice que A es *conexo*.

    a) Probar que $A = \{0, 1\}$ no es conexo.

    b) Probar que $A = [0, 1]$ es conexo.

    c) Probar que $\mathbb{Q}$ no es conexo.

11. **Funciones monótonas a trozos**

    Si bien muchas funciones sencillas con las que trabajamos no son monótonas, sí son monótonas a trozos. Por ejemplo, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ no es monótona en $\mathbb{R}$ pero sí es monótona si la restringimos al intervalo $(-\infty, 0]$ o al intervalo $[0, +\infty)$.

    Tenemos así que para esta función, el dominio está compuesto por intervalos (trozos) donde la función sí es monótona.

    Podemos intentar dar entonces una definición de función monótona a trozos en ese sentido.

    Empezamos por estudiar el problema cuando la función está definida en un intervalo cerrado.

    Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos números, con $a < b$, y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función.

    Proto definición 1: Decimos que la función f es *monótona a trozos* si existen una cantidad finita de intervalos cerrados $I_1, \ldots, I_n$ tales que

    - $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} I_i = [a, b]$. Es decir, la unión de estos intervalos es $[a, b]$ el dominio de la función.
    - $f|_{I_j}$ es monótona. Es decir la función f es monótona restricta a cada uno de estos intervalos.
    - $\# I_i \cap I_j \leq 1$ si $i \neq j$. Es decir la intersección de dos de estos intervalos consta de a lo sumo un punto, en otras palabras, dos intervalos distintos solo se intersecan a lo sumo en el borde.

    El último punto no es necesario, pero sirve para vizualizar mejor la definición.

    Proto definición 2: Si existen una cantidad finita de intervalos disjuntos $I_1, \ldots, I_n$ tales que

    - $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} I_i = [a, b]$
    - $f|_{I_i}$ es monótona.

    Para que esta definición tenga sentido, se tiene que permitir que los intervalos sean abiertos y/o semi abiertos. Además permitimos puntos como intervalos ($[c, c]$ es un intervalo que consta solo del punto c).

    a) Probar que la proto definición 1 es equivalente a que existan una cantidad finita de puntos $a_1, \ldots, a_n$, con $a_i < a_{i+1}$, $a_1 = a$, $a_n = b$ tales que $f|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es monótona

    b) Probar que la función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(x)$ es monótona a trozos con ambas proto definiciones.

c) Probar que la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, es monótona a trozos con la proto definición 2 pero no con la proto definición 1.

d) Probar que las funciones convexas son monotonas a trozos con ambas proto definiciones.

e) Probar que la función $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, $g(0) = 0$ no es monotona a trozos con ninguna de estas proto definiciones. Conjeture una proto definición para que esta función si sea monótona a trozos.