Lógica de Primer Orden

Conceptos Básicos

Introducción a las Bases de Datos

1 Lógica de Primer Orden (FOL)

- Es un **lenguaje formal** que trata de representar la forma en que se piensa en matemáticas.
- El lenguaje, es un conjunto de tiras de símbolos, por lo que está en el **Mundo Sintáctico**.
- Este lenguaje, se interpreta como propiedades (condiciones) sobre los elementos del **Mundo Semántico**. Estas condiciones, pueden ser **Verdaderas** o **Falsas**.
- El lenguaje provee mecanismos que permiten probar (demostrar matemáticamente) que si ciertas propiedades son verdaderas, otras propiedades son verdaderas.

1

La Lógica de Primer Orden es un **lenguaje formal** que trata de representar la forma en que se piensa en matemáticas.

El lenguaje, es un conjunto de tiras de símbolos, por lo que está en el **Mundo Sintáctico**.

Las tiras de símbolos que pertenecen a este lenguaje no son cualesquiera sino que tienen una definición bien precisa.

Cada una destas tiras, se usa para representar una de dos cosas: o elementos del universo o bien propiedades (condiciones) sobre los elementos del Universo. El universo y las propiedades básicas, están en el **Mundo Semántico**. Un punto importante es que estas condiciones pueden ser **Verdaderas** o **Falsas**.

El lenguaje[1] provee mecanismos que permiten probar[2] que si ciertas condiciones son verdaderas, otras condiciones tienen que ser verdaderas.

Resumiendo: se escriben tiras de símbolos en la sintaxis del lenguaje que cuando las interpretamos, nos hablan de condiciones que ocurren o no en el Mundo Semántico. Si la correspondencia entre el Mundo Semántico y el Mundo Real está correctamente

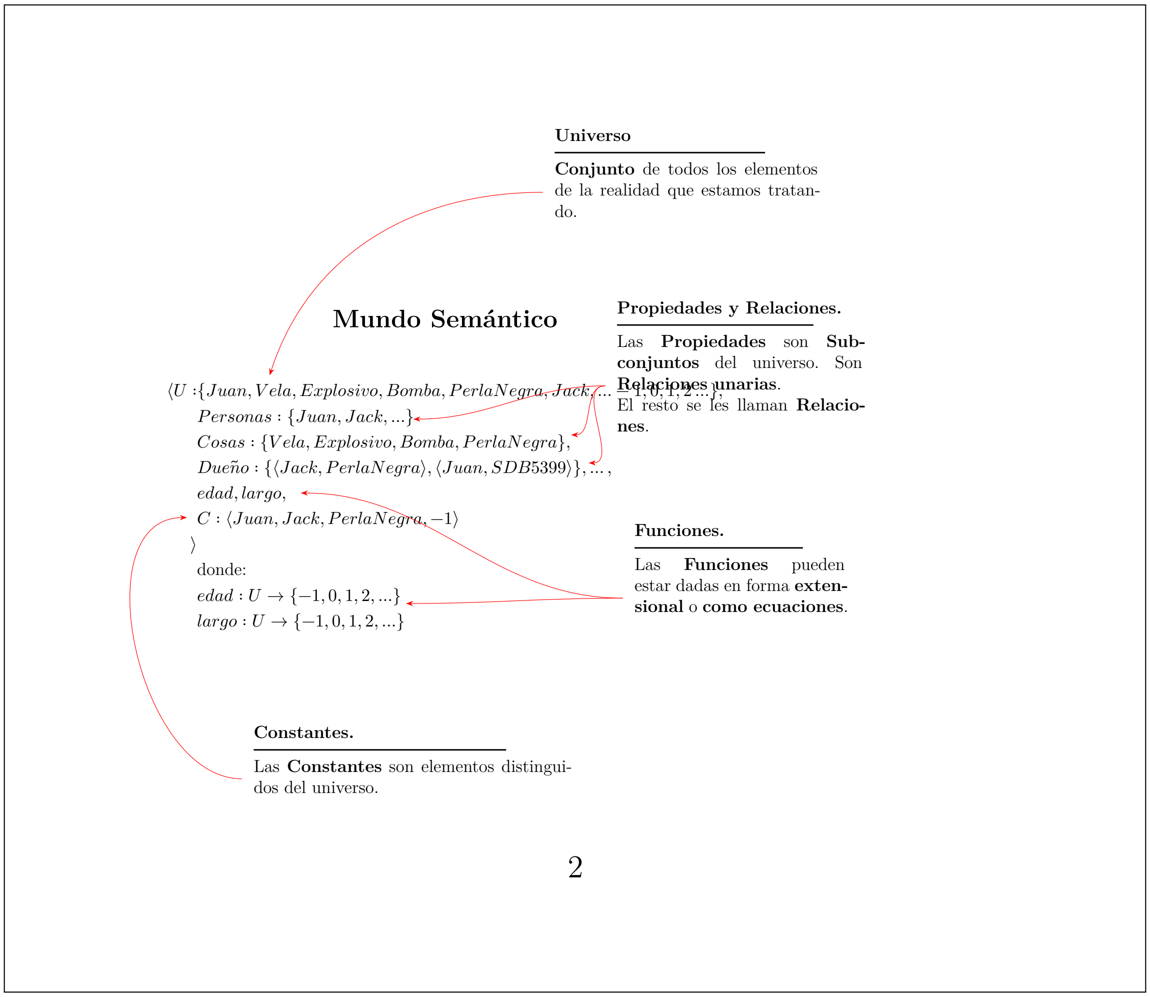
[1]O sea, lo que está en el ***Mundo Sintáctico***.

[2]Aquí, el término *probar* se usa en el sentido de *demostrar matemáticamente*.

realizada, entonces también describen condiciones que deben ocurrir en el **Mundo Real**.

La ventaja principal de esta estrategia para representar la realidad es que se puede hacer un procesamiento semi-automático para procesar las representaciones y, si están bien construidas, entender esos resultados en términos del mundo real.

2 Semántica



El **Mundo Semántico**, se representa con una **Tupla** que contiene el conjunto de los elementos de los que queremos hablar, sobre los cuales queremos establecer condiciones. A esa representación matemática de la realidad se le suele llamar **Estructura Matemática** o simplemente **Estructura**.

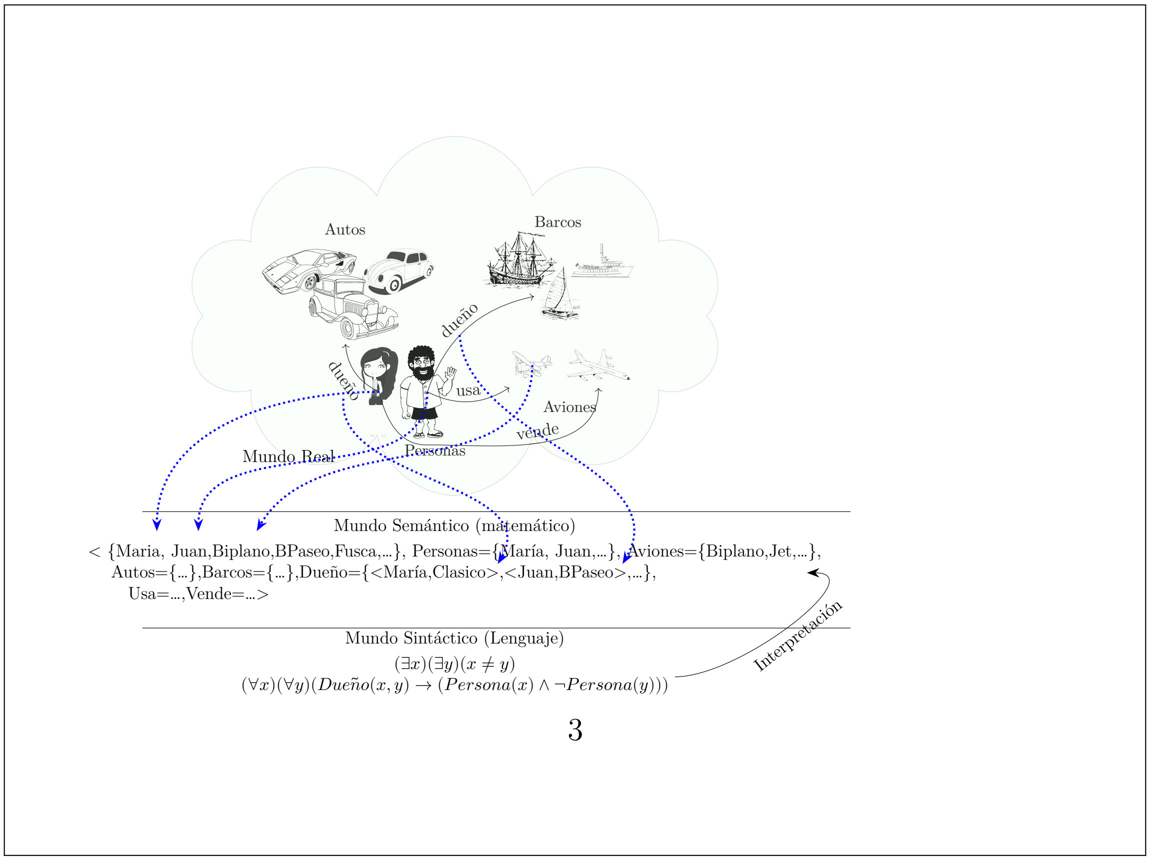
Es así que tenemos el **Universo** o **Dominio**. Es un conjunto con todos los elementos posibles que haya que considerar en la realidad.

Luego hay una secuencia de **Propiedades y Relaciones**. Las propiedades son **subconjuntos** de elementos del universo y las relaciones son conjuntos de **tuplas** de elementos del universo (parejas, ternas, cuaternas, etc.). Las relaciones representan relaciones (o correspondencias) entre elementos del universo (ej: Dueño). Las propiedades representan *clases* de elementos del universo.

Luego hay **Funciones** que se usan para representar propiedades de los elementos del universo (No confundirlas con las propiedades) como, por ejemplo, edad de una persona, el año de un auto o el largo de un terreno.

Además de todos estos elementos, podemos tener **Constantes** que son elementos distinguidos del universo. Son elementos de los que interesa hablar particularmente.

3 Lógica de Primer Orden (FOL)



De esta forma, el **Mundo Real** se ”copia” en el esa tupla que tenemos en el **Mundo Semantico**, con la ventaja que podemos verificar las condiciones.

Por otro lado, en el **Mundo Sintáctico** se puden describir otras condiciones y chequar si se cumplen o no en el **Mundo Semántico**.

Para hacer esto, se define una función se llama **Interpretación** y que nos permite obtener para cada condición si se cumple o no en el **Mundo Semántico** y por lo tanto, en el **Mundo Real**.

4 Lógica de Primer Orden (FOL)

- El lenguaje se estructura en dos capas:

Terminos

Representan los elementos del universo.
Un término, está en el **Mundo Sintáctico** (es una expresión) y su significado (o valor) esta en el **Mundo Semántico** y es un elemento del universo.

Fórmulas

Representa condiciones o propiedades que deben cumplir los elementos del universo.
Una fórmula, está en el **Mundo Sintáctico** y su significado es **verdadero** o **falso**, dependiendo si las condiciones se cumplen en el **Mundo Semántico** (o sea, en la realidad).

4

5 Ejemplo

La Realidad

Hay estudiantes que se inscriben a cursos.
De los estudiantes se conoce su cédula de identidad y su nombre.
La cédula de indentidad identifica al estudiante (No hay dos estudiantes con la misma cédula).
De los cursos se conoce su nombre, y un número que es su código.
El código identifica al curso (No hay dos cursos con el mismo código).
De la inscripción de un estudiante a un curso, se conoce la fecha de inscripción.

5

Para describir esta realidad:

- Deberíamos decidir cómo está estructurado el **Mundo Semántico**.
- Debemos dar condiciones en el **Mundo Sintáctico** que necesariemente deben ser verdaderas si la representación de la realidad en el **Mundo Semántico** es correcta.

6 Ejemplo

El Mundo Semántico

- **Universo:** $Estudiantes \cup Cursos \cup CI \cup String \cup \mathbb{N} \cup Fechas$
- **Relaciones:**

$$\begin{array}{ll} Estudiantes & \\ Cursos & \\ CI's & \\ Inscriptos & : Estudiantes \times cursos \end{array}$$

- **Funciones:**

$$\begin{array}{ll} CI & : Estudiantes \rightarrow CI \\ nombreEst & : Estudiantes \rightarrow String \\ codigo & : Cursos \rightarrow \mathbb{N} \\ NombreCurso & : Cursos \rightarrow String \\ Fecha & : Inscriptos \rightarrow Fechas \end{array}$$

6

7 Ejemplo

El Mundo Sintáctico

- **Axiomas (Condiciones que sabemos que son verdaderas en la realidad):**

$$\forall x \in Estudiante. \forall y \in Estudiante.$$
$$(CI(x) = CI(y) \to x = y)$$
$$\forall x \in Cursos. \forall y \in Cursos.$$
$$(codigo(x) = codigo(y) \to x = y)$$

- **Equivalente a:**

$$\neg \exists x \in Estudiante. \exists y \in Estudiante.$$
$$(CI(x) = CI(y) \land \neg x = y)$$
$$\neg \exists x \in Cursos. \exists y \in Cursos$$
$$(codigo(x) = codigo(y) \land \neg x = y)$$

7

8 Cómo se lee ?

Diferenciar Términos de Fórmulas

$$\forall x \in Estudiantes . \forall y \in Estudiantes$$
$$(CI(x) = CI(y) \to x = y)$$

Términos	Representan Elementos del Universo.	
Fórmulas	Pueden ser verdaderas o falsa. Representa lo que se dice de los elementos del universo.	

8

Los **términos** Se piensan como elementos del universo. Pueden ser variables, constantes o funciones aplicadas a otros términos.
Ej: x, 25, CI(juan)

Las **Fórmulas** son condiciones que supuestamente deben cumplir los elementos del universo. Para saber si son verdaderas o falsas hay que ir a la estructura en la cual se está interpretando. Si se cumplen en la estructura, toman el valor **verdadero** y no se cumplen en la estructura, entonces toman el valor **falso**.

Para comprender las fórmulas, hay que conocer los **operadores lógicos**.

9 Operadores Lógicos

$\alpha \wedge \beta$	Es verdadero cuando α y β son verdaderas
$\alpha \vee \beta$	Es verdadero cuando α o β o las dos son verdaderas
$\alpha \leftrightarrow \beta$	Es verdadero cuando las dos partes toman el mismo valor, sea verdadero o falso
$\alpha \rightarrow \beta$	Es verdadero cuando, si α es verdadera, entonces βes verdadera. Otra forma de verlo es que es verdadero cuando α es falso o β es verdadero.
$\neg\alpha$	Es verdadero cuando α es falso.

9

El operador **implica** ($\rightarrow$) es, sin duda alguna, el más difícil de entender. Considere la siguiente expresión:

$$\alpha \rightarrow \beta$$

Esta expresión, como todos los operadores lógicos, se puede ver como una abstracción de una frase en español:

Si α entonces β

Esta expresión se va a interpretar como **falso**, **solamente** en el caso en que β es falso y α es verdadero. Algunos ejemplos en español son los siguientes:

a Si *la Luna es de queso* entonces *la Tierra gira alrededor del Sol.*

b Si *la Luna es de queso* entonces *el Sol gira alrededor de la Tierra.*

c Si *la Tierra gira alrededor del Sol* entonces *la Luna es de queso.*

Las frases **a** y **b**, son ***verdaderas*** porque la Luna no es de queso. No importa el valor del consecuente[3]. En cambio, la frase **c** es ***falsa***, dado que su antecedente es verdadero pero su consecuente es falso.

[3] En $\alpha \to \beta$, a α se le llama *antecedente* y a β *consecuente*.

10 Operadores Lógicos: Cuantificadores

$\exists x.\alpha(x)$	Es verdadero cuando **algunos** elementos e en el universo son tales que $\alpha(e)$ es verdadero
$\forall x.\alpha(x)$	Es verdadero cuando **todos** los elementos a en el universo (uno cualquiera) cumplen que $\alpha(a)$ es verdadero

$\exists x \in S.\alpha(x)$	Es verdadero cuando **algunos** elementos e en el conjunto S tal que $\alpha(e)$ es verdadero
$\forall x \in S.\alpha(x)$	Es verdadero cuando **todos** los elementos a en el conjunto S (uno cualquiera) cumplen que $\alpha(a)$ es verdadero

10

En las dos primeras formas de los cuantificadores, las variables toman valores del universo. Dicho de una forma más informal, para ver la verdad de la expresión debemos *recorrer* el universo, tomando los valores uno a uno, chequeando si la fórmula α es verdadera cuando en el lugar de la variable consideramos el valor. En el caso del cuantificador existencial ($\exists$), se debe encontrar **al menos un elemento** e en el universo que haga verdadero a α cuando se pone el valor de e en el lugar de la variable[4].En el caso del cuantificador universal ($\forall$) se debe verificar que **cada uno de los elementos** del universo hagan verdadera a α en los términos descriptos anteriormente.
Aquí debería quedar claro que hay fórmulas que son verdaderas en una estructura y falsas en otras. Considere el seiguiente ejemplo:

$$\forall x.Votantes(x) \wedge MayorDe18(x)$$

En una estructura en donde el universo[5] tieene **solamente** a todos los votantes

[4]Esta **sustitución** de la variable x por el valor e se escribe como $\alpha(e)$

[5]Se está asumiendo que en la estructura, el universo tiene **solamente** a todos los votantes, hay

en Uruguay, la fórmula es *verdadera*. Sin embargo, en una estructura en donde el universo son todos los uruguayos, entonces la fórmula es *falsa*.

Observar que si en el ejemplo se cambia $\wedge$ por $\rightarrow$, se obtiene las siguiente fórmula:

$$\forall x.Votantes(x) \rightarrow MayorDe18(x)$$

Esta fórmula es **verdadera** en ambas estructuras.

Las dos últimas líneas de la tabla, presentan las formas **relativizadas** de los cuantificadores. Esas formas de escribir se pueden entender en términos de las primeras:

$$\begin{aligned} \exists x \in S.\alpha(x) &:= \exists x.x \in S \wedge \alpha(x) \\ \forall x \in S.\alpha(x) &:= \forall x.x \in S \rightarrow \alpha(x) \end{aligned}$$

---

además una propiedad que contiene a todos los votantes, y otra que contiene a todas las personas mayores de 18 años que están en el universo.

11 Cómo se va usar en el curso ?

Modelos de Datos

- La Lógica de Primer Orden es bastante compleja de escribir, aunque no tanto de entender.
- En el área de Base de Datos, se utiliza constantemente.
- Se usan otros lenguajes más simples de escribir pero el significado es similar al de la lógica de primer orden.
- Estos lenguajes se llaman **Modelos de Datos**.

11

12 Resto del Curso

Modelos a Estudiar

Se van a estudiar dos modelos de datos:

- **Modelo Entidad-Relación (MER):** Orientado a describir la realidad. Esa descripción se hace en el Mundo Sintáctico pero mirando el Mundo Real y pensando en cómo nos queda en el Mundo Semántico.
- **Modelo Relacional (MR):** Orientado a la base de datos. Va a permitir operar con datos.
- **Correspondencia MER - MR:** Se va a estudiar cómo se puede construir un esquema en MR que represente lo mismo que lo escrito en MER.

12