Clase 4: Axiomas de los números reales
(Parte 1: Apostol Cap I - P3)

Definir $\mathbb{R}$
- Método constructivo: $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{difícil}} \mathbb{R}$
- $\boxed{\text{Método axiomático}}$
  - Axiomas de cuerpos
  - Axiomas de orden
  - Axioma de completitud

Axiomas de cuerpo

Los números reales $\mathbb{R}$ poseen dos operaciones
- Suma $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ (x,y) \mapsto x+y$
- Producto $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ (x,y) \mapsto xy$

que verifican los siguientes axiomas:

Ax 1 (Conmutatividad): $x+y = y+x$, $xy = yx$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$

Ax 2 (Prop. asociativa): $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$(xy)z = x(yz)$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

Ax 3 (Prop. distributiva): $x.(y+z) = xy + xz$

$(x+y).z = xz + yz$ $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

Ax 4 (Existencia de neutros): Existen dos reales distintos $0, 1 \in \mathbb{R}$ que verifica:
- $x+0 = 0+x = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $x.1 = 1.x = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Ax 5 (Existencia de opuestos): $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists x' \in \mathbb{R} \ / \ x+x' = 0$

Ax 6 (Existencia de inversos): $\forall x \in \mathbb{R}$, $\underline{x \neq 0}$, $\exists x' \in \mathbb{R} \ / \ x.x' = 1$

Teo: El neutro de la suma es único.

Dem. Supongamos que $0, 0' \in \mathbb{R}$ son dos neutros para la suma, o sea se cumple: $x + 0 = 0 + x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$x + 0' = 0' + x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} 0 + 0' = 0 \text{ (pues } 0' \text{ es neutro de la suma)} \\ 0 + 0' = 0' \text{ (" } 0 \text{ es neutro de la suma)} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 0'.$$

Teo. El neutro del producto es único

Dem: Ejercicio.

Teo. El opuesto de cada elemento es único.

Dem. Sea $x \in \mathbb{R}$ y supongamos que $x', x'' \in \mathbb{R}$ sean opuestos de x, o sea que se cumple: $x + x' = 0 \quad (*)$
$x + x'' = 0 \quad (**)$

$$x' \overset{Ax4}{=} x' + 0 \overset{(**)}{=} x' + (x + x'') \overset{Ax2}{=} (x' + x) + x''$$

$$\underset{Ax1}{=} (x + x') + x'' \underset{(*)}{=} 0 + x'' \underset{Ax4}{=} x'' \Rightarrow \boxed{x' = x''}$$

Notación: Al opuesto de x lo denotamos $-x$

Def (Resta): Si $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x - y \overset{def}{=} x + (-y)$.

Teo. El inverso de cada elemento $x \neq 0$ es único.

Dem: Ejercicio.

Notación: Si $x \neq 0$, al inverso de x lo denotamos $1/x$ (también se lo denota x^{-1})

Def. (División): Si $x, y \in \mathbb{R}$ e $y \neq 0 \Rightarrow x/y \overset{def}{=} x.(1/y)$.

Teo. (Cancelativa de la suma): Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ / $x+z = y+z \Rightarrow x = y$.

Dem. $x+z = y+z \Rightarrow (x+z)+(-z) = (y+z)+(-z)$

$\underset{\text{Asociativo}}{\Rightarrow} x+(z+(-z)) = y+(z+(-z))$

$\underset{\text{opuesto}}{\Rightarrow} x+0 = y+0 \underset{\text{neutro}}{\Rightarrow} x = y$.

teo. Sea $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a+x = b \Rightarrow x = b-a$

Dem. $a+x = b \Rightarrow (a+x)+(-a) = b+(-a)$

$\underset{\text{def}}{\Rightarrow} (a+x)+(-a) = b-a$

$\underset{\text{conm.}}{\Rightarrow} (x+a)+(-a) = b-a$

$\underset{\text{asoc.}}{\Rightarrow} x+(a+(-a)) = b-a$

$\underset{\text{op.}}{\Rightarrow} x+0 = b-a \overset{\text{neutro}}{\Rightarrow} x = b-a$.

Teo. Sea $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Si $ax = b \Rightarrow x = b/a$

Dem. Ejercicio.

Teo.
1) $-x = (-1) \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2) $-(-x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3) $(x^{-1})^{-1} = x \quad \forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0.$

4) (Distributiva de la resta): $x(y-z) = xy - xz$
5) $x \cdot 0 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
6) (Propiedad Hankeliana): $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ o $y = 0$

7) $(x/y)^{-1} = y/x$ si $x, y \in \mathbb{R},\ x \neq 0, y \neq 0.$

8) $x/y + z/t = (xt + yz)/yt$ si $y \neq 0, t \neq 0$

9) $(x/y) \cdot (z/t) = (xz)/(yt)$ si $y \neq 0, t \neq 0.$

$$\begin{aligned}(x/y)(y/x) &= (x \cdot (y^{-1})) \cdot (y \cdot (x^{-1})) \\ &= x \cdot ((y^{-1}) \cdot (y \cdot (x^{-1}))) \\ &= x \cdot ((y^{-1} \cdot y) \cdot x^{-1}) \\ &= x(1 \cdot x^{-1}) = x \cdot x^{-1} = 1\end{aligned}$$

Pista para probar 7)

$\Rightarrow (x/y) = (y/x)^{-1}$, $(y/x) = (x/y)^{-1}$

Axiomas de orden

Existe un subconjunto $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$ (que llamamos reales positivos) que verifica:

Ax 7 (Cerrado por suma y producto):
Si $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}^+$, $xy \in \mathbb{R}^+$

Ax 8: Si $x \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$ pero no ambos.

Ax 9. $0 \notin \mathbb{R}^+$.

Definición:
$x < y$ significa $y - x \in \mathbb{R}^+$
$x > y$ " $x - y \in \mathbb{R}^+$
$x \leq y$ " $y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$x \geq y$ " $x - y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Obs: $\underbrace{0+0=0}_{\uparrow \text{ neutro}} \Rightarrow -0 = 0$

Obs: $x > 0 \overset{def}{\Leftrightarrow} x - 0 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x + (-0) \in \mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow x + 0 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$.

Notación: $x < y < z$ significa $x < y$ y $y < z$.

teo (Transitiva): Si $x < y < z \Rightarrow x < z$.

Dem. $\left.\begin{array}{l} x < y \overset{\text{def}}{\Rightarrow} y - x \in \mathbb{R}^+ \\ y < z \underset{\text{def.}}{\Rightarrow} z - y \in \mathbb{R}^+ \end{array}\right\} \overset{Ax7}{\Rightarrow}$

$$(z-y)+(y-x) \in \mathbb{R}^+ \xRightarrow{\text{asociativa}} z + \overbrace{(-y+y)}^{0} - x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow z - x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x < z.$$

teo (tricotomía): Si $x \in \mathbb{R}$ entonces se cumple solo una de estas tres afirmaciones:

1) $x = 0$
2) $x \in \mathbb{R}^+$
3) $-x \in \mathbb{R}^+$

teo. 1) Si $a < b \Rightarrow a+c < b+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$
2) Si $a < b$, $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
3) Si $a < b$, $c < 0 \Rightarrow ac > bc$
4) Si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$
5) $1 > 0$.