Curso MNNS. - Hoja de notas N°2. Miércoles 24/Agosto/2005

Esquemas de integración temporal.

Ejemplos de esquema explícitos e implícitos de integración temporal considerados sobre la ecuación de advección-difusión lineal en 1D, no estacionaria:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Disponiendo de soluciones numéricas aproximadas (de la ecuación en diferencias) para los tiempos 1,2...m ($\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$,..ϕ^{m}) se desea obtener la solución para tiempo m+1 : ϕ^{m+1}

Esquemas Explícitos: ejemplos (discretización entorno al instante **m**)

Forward Euler + (UDS) en termino convectivo. (orden o(Δt))

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta t} + \frac{u}{\Delta x} \cdot \left(\phi_i^m - \phi_{i-1}^m\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m\right)$$

Forward Euler + (CDS) en termino convectivo. (orden o(Δt))

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta t} + \frac{u}{2\Delta x} \cdot \left(\phi_{i+1}^m - \phi_{i-1}^m\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m\right)$$

Leap Frog + (CDS) en termino convectivo. (orden o(Δt^2))

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^{m-1}}{2\Delta t} + \frac{u}{2\Delta x} \cdot \left(\phi_{i+1}^m - \phi_{i-1}^m\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m\right)$$

Esquemas Implícitos: ejemplos (discretización entorno al instante **m+1**)

Backward Euler + (UDS) en término convectivo. (orden o(Δt))

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta t} + \frac{u}{\Delta x} \cdot \left(\phi_i^{m+1} - \phi_{i-1}^{m+1}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^{m+1} - 2\phi_i^{m+1} + \phi_{i-1}^{m+1}\right)$$

Backward Euler + (CDS) en término convectivo. (orden o(Δt))

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta t} + \frac{u}{2\Delta x} \cdot \left(\phi_{i+1}^{m+1} - \phi_{i-1}^{m+1}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^{m+1} - 2\phi_i^{m+1} + \phi_{i-1}^{m+1}\right)$$

Crank Nicholson + (CDS) en término convectivo. (orden o(Δt^2))

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta t} + \frac{u}{2\Delta x} \cdot \frac{1}{2}\left[\left(\phi_{i+1}^{m+1} - \phi_{i-1}^{m+1}\right) + \left(\phi_{i+1}^m - \phi_{i-1}^m\right)\right] =$$
$$= \frac{\alpha}{\Delta x^2}\,\frac{1}{2}\left[\left(\phi_{i+1}^{m+1} - 2\phi_i^{m+1} + \phi_{i-1}^{m+1}\right) + \left(\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m\right)\right]$$

Obs: en Crank Nicholson la discretización es entorno al instante m+½

Three Time Level Method + (CDS) en término convectivo. (orden o(Δt^2))

$$\frac{3\phi_i^{m+1} - 4\phi_i^m + \phi_{i-1}^{m-1}}{2\Delta t} + \frac{u}{2\Delta x} \cdot \left(\phi_{i+1}^{m+1} - \phi_{i-1}^{m+1}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^{m+1} - 2\phi_i^{m+1} + \phi_{i-1}^{m+1}\right)$$

Esquemas Explícitos: **forma general y representación matricial**

Forma general : $\phi_P^{m+1} = B_P \cdot \phi_P^m + B_W \cdot \phi_W^m + B_E \cdot \phi_E^m + \ldots + B_{EE} \cdot \phi_{EE}^m \ldots + \ldots C_P \cdot \phi_P^{m-1} + \ldots$

en forma matricial : $\vec{\phi}^{m+1} = \mathbf{B} \cdot \vec{\phi}^m + \mathbf{C} \cdot \vec{\phi}^{m-1} + \ldots$ (multiplicación matriz-vector)

Ejemplo: **Forward Euler + UDS**

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta t} + \frac{u}{\Delta x} \cdot \left(\phi_i^m - \phi_{i-1}^m\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m\right)$$

definimos $c = \frac{\Delta t \cdot u}{\Delta x}$, $d = \frac{\Delta t \cdot \alpha}{\Delta x^2}$:

$B_P = 1 - c - 2d$

$B_W = + c + d$

$B_E = + d$

Ejemplo : **Leap Frog + CDS**

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^{m-1}}{2\Delta t} + \frac{u}{2\Delta x} \cdot \left(\phi_{i+1}^m - \phi_{i-1}^m\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m\right)$$

$B_P = - 4d;$
$B_W = + c + 2d;$
$B_E = + 2d;$
$C_P = 1$

Esquemas Implícitos: **forma general y representación matricial**

Forma general : $A_P \cdot \phi_P^{m+1} + A_W \cdot \phi_W^{m+1} + A_E \cdot \phi_E^{m+1} + \ldots + A_{EE} \cdot \phi_{EE}^{m+1} = Q_P$

en forma matricial : $\mathbf{A} \cdot \vec{\phi}^{m+1} = \vec{Q}$ (sistema lineal de ecuaciones)

Ejemplo : **Backward Euler + CDS**

$$\frac{\phi_i^{m+1} - \phi_i^m}{\Delta t} + \frac{u}{2\Delta x} \cdot \left(\phi_{i+1}^{m+1} - \phi_{i-1}^{m+1}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^{m+1} - 2\phi_i^{m+1} + \phi_{i-1}^{m+1}\right)$$

$A_P = (+ 1 + 2d)/\Delta t$
$A_W = (- c/2 - d)/\Delta t$
$A_P = (+ c/2 - d)/\Delta t$
$Q_P = \phi_P^m / \Delta t$

Ejemplo : **Three Time Level + CDS**

$$\frac{3\phi_i^{m+1} - 4\phi_i^m + \phi_{i-1}^{m-1}}{2\Delta t} + \frac{u}{2\Delta x} \cdot \left(\phi_{i+1}^{m+1} - \phi_{i-1}^{m+1}\right) = \frac{\alpha}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1}^{m+1} - 2\phi_i^{m+1} + \phi_{i-1}^{m+1}\right)$$

$A_P = (+ 3/2 + 2d)/\Delta t$
$A_W = (- c/2 - d)/\Delta t$
$A_P = (+ c/2 - d)/\Delta t$
$Q_P = (+4\,\phi_P^m - \phi_P^{m-1})/2\Delta t$