Facultad de Ingeniería
IMERL
MATEMÁTICA DISCRETA I
Curso 2023

Aclaraciones y Sugerencias

Aclaraciones

Este Cuaderno de Ejercicios permite dar un seguimiento de cada uno de los temas del curso *Matemática Discreta 1* en su edición de Segundo Semestre de 2023.

El Cuaderno se compone de 10 Prácticos con un total de 100 ejercicios. Los Prácticos 1 al 6 tienen un total de 50 ejercicios y cubren los temas de la primera mitad del curso. Los Prácticos 7 al 10 tienen un total de 50 ejercicios y cubren los temas de la segunda mitad del curso. Los ejercicios de cada cuaderno se presentan por orden gradual de dificultad.

La evaluación del curso va a consistir en 2 parciales con un total de 40 y 60 puntos cada uno. Cabe destacar que 2 de los primeros 50 ejercicios se incluirán en el Primer Parcial, mientras que 2 de los últimos 50 ejercicios se incluirán en el Segundo Parcial.

Cada Práctico tiene el nombre del tema en su encabezado, como también las secciones del libro de Grimaldi correspondientes.

Sugerencias

Es muy conveniente para el aprendizaje proponerse resolver todos los ejercicios. Leer las secciones del libro de Grimaldi antes de abordar los ejercicios de cada Práctico. El libro se descarga desde el sitio de EVA (o pueden conseguir fotocopias de cada una de las secciones de estudio en el Kiosco del CEI). Allí se encuentran los elementos teóricos necesarios para la resolución de los ejercicios.

Es muy recomendable reunirse en grupo, interactuar con sus compañeras/os para saber cómo pensaron los ejercicios. De hecho, los conceptos del curso se aprenden mejor conociendo las distintas ideas, atajos o soluciones que pueden provenir de sus compañeras/os. Las clases se prestan muy bien para este intercambio, donde pueden interactuar junto con el/la docente.

Este curso de matemática favorece a la formación en Ingeniería en general, y en Computación en particular. Al resolver los ejercicios, están gradualmente construyendo bloques que serán esenciales en su camino de vida. Dado que es muy bueno disfrutar la vida, en particular, ¡también es bueno disfrutar al resolver estos ejercicios!

Deseamos que así sea y estaremos a su disposición en clases para aprender con ustedes.

Saludan cordialmente,
Jazmín Finot, Josefina González, Gabriel Mello,
Mariana Pereira, Pablo Romero y Alexandre Miquel.
(Equipo docente de MD1 - Segundo Semestre de 2023).

1. Inducción Completa (Secciones 4.1, 4.2 y 4.5)

Ejercicio 1
Probar de dos formas distintas que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo natural n.

Ejercicio 2
Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n.

Ejercicio 3
Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural n_0 que se debe encontrar.

Ejercicio 4
Probar que para todo natural a existe un natural k tal que $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = 9k$.

Ejercicio 5
Sea n un número natural tal que $n \geq 1$. Consideremos un tablero cuadrado compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demostrar que es posible cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.

Ejercicio 6
Probar que si $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$ y $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \, \forall n \geq 1$ entonces $a_n \geq 3^n, \ \forall n \in \mathbb{N}^+$.

Ejercicio 7
Demostrar que, a partir de un segmento de longitud 1 en el plano, es posible construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}^+$.

Ejercicio 8
Probar que todo número natural mayor que 1 se puede expresar como producto de números primos.

Ejercicio 9
Probar que el Principio del Buen Orden implica el Principio de Inducción Completa sobre los números naturales.

2. Combinatoria (Secciones 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4)

Ejercicio 1
Un alfabeto consta de 5 vocales y 22 consonantes. ¿Cuántas palabras de longitud 6 se pueden formar con tal alfabeto que no tengan ni dos consonantes ni dos vocales juntas?

Ejercicio 2
La final de un campeonato de fútbol ha terminado en empate y debe definirse por penales. Para patearlos, la directora técnica debe elegir en orden 5 jugadoras diferentes de un total de 11. ¿De cuántas formas puede hacerlo? Responder la misma pregunta si la capitana del equipo siempre patea el quinto penal.

Ejercicio 3

(a) ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar usando todas las letras de la palabra $ARBOL$?

(b) ¿ Cuántas palabras de largo 3 se pueden formar usando letras distintas de la palabra $ARBOL$?

(c) ¿ Cuántas palabras distintas pueden obtenerse permuntando las letras de la palabra $ALGORITMO$?

Ejercicio 4
En una prueba que consta de 10 preguntas un estudiante decide responder sólo 6, y quiere que al menos 3 de ellas estén entre las 5 primeras. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo?

Ejercicio 5

(a) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar 3 dados idénticos?

(b) ¿Cuántas fichas diferentes hay en el juego del dominó?

(c) ¿Cuántos recorridos diferentes puede realizar una torre de ajedrez para desplazarse desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha, admitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha?

Ejercicio 6

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea?

(b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos.

Ejercicio 7
¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

Ejercicio 8

(a) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$.

(b) ¿Cuántas soluciones hay si se reemplaza el $=$ por un $<$?

(c) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ tal que se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_3 \geq 3$, $x_4 \geq 3$.

Ejercicio 9
¿De cuántas formas se puede partir un conjunto de $2n$ elementos en n conjuntos de 2 elementos?

Ejercicio 10
Contar la cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos.

Ejercicio 11

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en xy^3z^5 del polinomio $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$

Ejercicio 12
Probar que el coeficiente en $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$ de $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$ es $PR^n_{(n_1,\dots,n_r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$, donde los exponentes son naturales tales que $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$.

Ejercicio 13
Dados $A = \{1, 2, \dots, n\}$ y $B = \{1, 2, \dots, m\}$, hallar la cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que:

(a) No hay restricciones.

(b) f es inyectiva.

(c) f es biyectiva

(d) f es monótona creciente estrictamente.

(e) f es monótona creciente.

(f) Cada elemento $i \in B$ es alcanzado r_i veces, donde $r_1 + \dots + r_m = n$.

Ejercicio 14
Probar las siguientes identidades usando la regla de la suma y del producto:

(a) $n^m = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m, i)$.

(b) $Sob(m + 1, n) = n(Sob(m, n - 1) + Sob(m, n))$.

(c) $S(m + 1, n) = S(m, n - 1) + nS(m, n)$.

(d) $Sob(m, n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m - i, n - 1)$.

(e) $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \binom{N-k}{n-i} = \binom{N}{n}$, siendo $k \leq n \leq N$.

(f) $n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$, donde $d_0 = 1$ y d_k es el número de desórdenes de tamaño k.

3. Principio de Inclusión-Exclusión (Secciones 8.1 a 8.3)

Ejercicio 1

(a) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 105 inclusive no son múltiplos de 3, 5 ni 7?

(b) ¿Cuántos números naturales entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no de 5, 7 ni 11?

Ejercicio 2
Se tira un dado 6 veces. Calcular la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado. Tomar en cuenta el orden de los valores obtenidos en el dado.
Por ejemplo, los resultados en orden $(6, 6, 2, 2, 1, 1)$ y $(6, 2, 6, 2, 1, 1)$ cuentan a favor como casos diferentes.

Ejercicio 3
¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa si hay 3 de cada uno de los siguientes colores: blanco, rojo, azul, negro?

Ejercicio 4
¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive cumplen que la suma de sus dígitos es igual a 31?

Ejercicio 5
Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

(c) $0 < x_1 \leq 4$, $1 < x_2 < 5$, $3 \leq x_3 \leq 7$ y $0 \leq x_4 \leq 8$.

Ejercicio 6
Hallar la cantidad de permutaciones de los dígitos de 123456789 tales que que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los dígitos pares no están en su posición original.

(c) Los dígitos pares no están en su posición original y los primeros cuatro dígitos son precisamente 1, 2, 3 y 4, en algún orden.

Ejercicio 7
Seis perros y dos gatos tienen cuatro escondites para guarecerse de la lluvia. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse los ocho animales en los cuatro escondites sabiendo que se utilizan todos los escondites y además no pueden haber perros ni gatos en el mismo escondite?

4. Principio del Palomar (Sección 5.5)

Ejercicio 1
Probar que entre 100000 personas hay al menos dos que nacieron al mismo tiempo (hora, minuto y segundo).

Ejercicio 2
Probar que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

Ejercicio 3
Probar que en una reunión cualquiera con dos o más personas siempre existen al menos dos personas que tienen la misma cantidad de amigos en esa reunión.

Ejercicio 4
Dados cinco punto de un cuadrado de lado 2, probar que hay al menos dos puntos cuya distancia es menor o igual que $\sqrt{2}$.

Ejercicio 5
Dado un número real x, denotamos mediante $\lceil x \rceil$ al menor entero y tal que $y \geq x$. Probar que toda función $f : A \to B$ donde $|A| > |B|$ tiene al menos $\lceil |A| \,/\, |B| \rceil$ elementos de A que toman el mismo valor.

Ejercicio 6
Consideremos un tablero rectangular compuesto por 141 filas y 8 columnas, definiendo en total 141×8 celdas. Cada celda se pinta de blanco o de negro de forma tal que cada fila tenga exactamente cuatro celdas pintadas de negro. Demostrar que hay al menos 3 filas con igual secuencia de colores.

Ejercicio 7
Determinar la mayor cantidad de caballos que se pueden poner en un tablero de ajedrez sin que ninguno pueda saltar hacia la posición de otro.

Ejercicio 8
Encontrar el menor entero positivo n que permita asegurar que, de cualquier forma que se elijan n enteros distintos entre 1 y 100 inclusive, habrá dos de ellos cuya suma sea igual a 50.

Ejercicio 9
Se sabe que Judit Polgár estudió ajedrez al menos una vez por día durante 30 días consecutivos, y en esos 30 días estudió exactamente 45 veces en total. Demostrar que existe un conjunto de días consecutivos en los que Judit Polgár entrenó en total exactamente 14 veces.

5. Sucesiones y Recurrencias (Secciones 10.1, 10.2 y 10.3)

Ejercicio 1
Expresar explícitamente en n las sucesiones:

(a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $a_0 = 1, a_1 = 3$.

(b) $b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $b_0 = 5, b_1 = 12$.

Ejercicio 2
Expresar a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

(a) La cantidad de saludos entre las primeras n personas que llegan a una reunión.

(b) El número de secuencias de ceros y unos de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

(c) El número de secuencias de largo n de letras A, B y C que no tienen la letra A dos veces seguidas.

(d) La cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se pueden subir de a uno o de a dos en cada paso.

(e) El número de secuencias de unos y doses que suman n. Por ejemplo, para $n = 3$ son 3 secuencias en total: 111, 12 y 21.

Ejercicio 3
Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar la cantidad de banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

(a) No hay restricciones sobre el color de cada franja.
(b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.
(c) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

Ejercicio 4
Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número: $a_n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$.

(a) Mostrar que a_n verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.
(b) Probar que a_n es un entero positivo para todo natural n.

Ejercicio 5
Expresar explícitamente en n las sucesiones:

(a) $c_{n+1} = c_n + n2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $c_0 = 0$.

(b) $d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n+1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$, con $d_0 = d_{100} = 0$.

(c) $e_{n+1} = 2e_n + 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con $e_0 = 0$.

(d) $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \in \mathbb{N}$, con $f_0 = f_1 = 1$.

6. Funciones Generatrices (Secciones 9.1, 9.2, 9.5 y 10.4)

Ejercicio 1
Encontrar las funciones generatrices para las siguientes sucesiones (por ejemplo en el caso de la sucesión $1, 1, 1, \ldots$ la respuesta pedida es $1/(1-x)$ y no $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ni $\sum x^i$).

(a) $C_0^6, C_1^6, C_2^6, \ldots, C_6^6, \ldots$
(b) $C_1^6, 2C_2^6, \ldots, 6C_6^6, \ldots$
(c) $1, -1, 1, -1, \ldots$
(d) $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
(e) $0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots$
(f) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$
(g) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$
(h) $0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$
(i) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots$
(j) $0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, a^6, b^7, \ldots$

Ejercicio 2
Determinar la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices.

(a) $f(x) = (2x - 3)^3$
(b) $f(x) = x^3/(1 - x)$
(c) $f(x) = x^3/(1 - x^2)$
(d) $f(x) = 1/(1 + 3x)$
(e) $f(x) = 1/(2 - x)$
(f) $f(x) = 3x^6 - 9 + 1/(1 - x)$

Ejercicio 3

(a) Hallar el coeficiente de x^8 en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^{10}$.
(b) Para cada n natural, hallar el coeficiente de x^8 en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^n$.
(c) Para cada natural n encontrar los coeficientes de x^5, x^8 y en general de x^r en $(1 + x + x^2)(1 + x)^n$ para $0 \le r \le n + 2$, $r \in \mathbb{N}$.
(d) Hallar el coeficiente de x^{15} en las funciones
  - $x^3(1 - 2x)^{10}$.
  - $(x^3 - 5x)/(1 - x)^3$.
  - $(1 + x)^4/(1 - x)^4$.

Ejercicio 4
Resolver el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \\ a_0 = 0,\ b_0 = 2, b_1 = 1 \end{cases}$$

Ejercicio 5
Verificar que $(1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)^{-1}$ es la función generatriz de la cantidad de formas en que podemos obtener un número n como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias).

Ejercicio 6
Hallar la función generatriz de la cantidad de formas que tiene un cajero automático de dar n pesos. Los cajeros sólo poseen billetes de 100, 200, 500 y 1000 pesos.

7. Relaciones (Secciones 5.1, 7.1, 7.2, 7.3 y 7.4)

Ejercicio 1
Determinar si las siguientes relaciones son reflexivas, irreflexivas, simétricas, antisimétricas, asimétricas o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

(a) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.

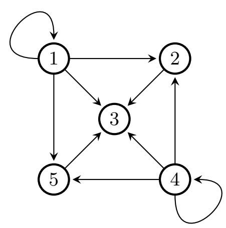
(b) $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.

(c) $\emptyset$.

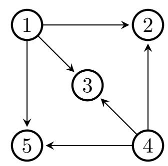
(d) $A \times A$.

(e) Tomar $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones cuyos grafos dirigidos son:

i)



ii)



(f) Las relaciones cuyas matrices son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2

(a) Determinar la cantidad de relaciones R que se pueden definir sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$.

(b) Construir la matriz y el diagrama de flechas (o digrafo) de una de estas relaciones.

Ejercicio 3
Sean R y S relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

(a) Elaborar un criterio para decidir si R es o no *simétrica* basándose en la matriz de R.

(b) Si R y S son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, R^{-1}, $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$?

(c) Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas, antisimétricas y transitivas*.

Ejercicio 4
¿Cuántas relaciones binarias (a) reflexivas, (b) simétricas, (c) antisimétricas son definibles sobre un conjunto con n elementos?

Ejercicio 5
En cada uno de los siguientes casos, probar que R es una relación de equivalencia en A y describir el conjunto cociente A/R:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es un número par.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a - b$ es múltiplo de 10.

(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

Ejercicio 6
Probar que si R es una relación en A que es simétrica y transitiva, tal que para todo a en A existe algún elemento b en A tal que aRb, entonces R es una relación de equivalencia en A.

Ejercicio 7
Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea R_n la cantidad de relaciones de equivalencia que pueden definirse en un conjunto con n elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n, i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Probar que:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $R_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, n)$

Ejercicio 8 Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia definidas en $\{1, 2, 3\}$.

Ejercicio 9 Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que tienen exactamente 3 clases de equivalencia.

Ejercicio 10 Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii y es múltiplo de x).

(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

Ejercicio 11 Hallar la cantidad de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tales que $|[1]| > |[2]| > |[3]|$.

Ejercicio 12 Calcular la cantidad de relaciones de orden definidas en $\{1, 2, 3\}$.

Ejercicio 13 Un orden parcial $(A, \leq)$ es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo.

(a) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un buen orden entonces es un orden total.

(b) Demostrar que si $(A, \leq)$ es un orden total entonces tiene a lo sumo un elemento maximal.

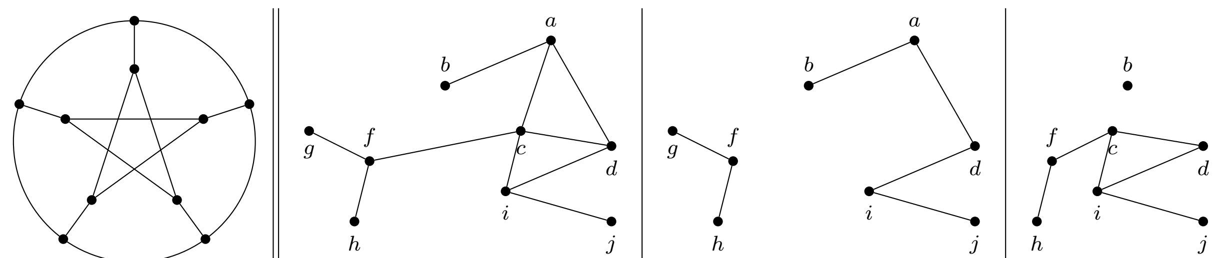
(c) Concluir que si un orden parcial $(A, \leq)$ tiene dos elementos maximales distintos o dos minimales distintos entonces no es un buen orden.

Ejercicio 14 Probar que si $(A, \leq)$ es un retículo y A es finito y no vacío entonces A tiene máximo y mínimo.

Ejercicio 15 Demostrar que en un conjunto con 61 personas hay al menos 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente o hay un al menos 6 personas tales que ninguna de ellas desciende de otra.

8. Teoría de Grafos - Elementos (Secciones 11.1, 11.2 y 12.1)

Definiciones: Todos los grafos se supondrán simples, es decir que son finitos, no dirigidos y sin lazos. El grafo *completo* K_n tiene n vértices y cada par de vértices tiene una arista que los une. El grafo *bipartito completo* $K_{n,m}$ tiene $n+m$ vértices n de los cuales están unidos a los otros m, y esas son las únicas adyacencias. El *camino simple* P_n tiene n vértices y todo él es un camino simple. El *n-ciclo* C_n tiene n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y aristas $v_1 v_n$ y $v_i v_{i+1}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. La *rueda* W_n consiste en un C_n más un vértice adicional unido a los n vértices del n-ciclo. El grafo de *Petersen* es el de la Figura 1 (i). Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos. El árbol trivial tiene un solo vértice y ninguna arista. La *distancia* entre dos vértices a y b de un grafo conexo es la menor de las longitudes de los caminos que los unen. El *diámetro* de un grafo conexo es la mayor de las distancias entre dos vértices cualesquiera. Por ejemplo, el diámetro de P_4 es 3 y el de C_5 es 2. Un vértice se dice *aislado* si no es adyacente a ningún otro vértice. Dado un grafo G denotaremos $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas de G.



(i) Grafo de Petersen | (ii) G | (iii) G_1 | (iv) G_2

Figura 1

Ejercicio 1 Para el grafo G de la Figura 1 (ii), determinar:

(a) Un camino que no sea un recorrido.

(b) Un recorrido que no sea camino simple.

(c) Los tres caminos simples de b a f.

(d) La cantidad de subgrafos conexos de G que tienen 4 vértices e incluyen algún ciclo.

(e) La cantidad de subgrafos recubridores de G.

(f) La cantidad de subgrafos recubridores conexos de G.

(g) Mostrar que G_1 y G_2 (Figuras 1 (iii) y (iv)) son subgrafos inducidos de G.

Ejercicio 2 Hallar el diámetro de los grafos K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y del grafo de Petersen.

Ejercicio 3 Sea G el grafo cuyos vértices son $\{$ 1, 2, $\ldots$,15$\}$ y tal que i es adyacente al j si y sólo si su máximo común divisor es mayor que 1. Determinar la cantidad de componentes conexas de G.

Ejercicio 4 ¿Cuántas hojas (vértices colgantes) tiene un árbol con exactamente cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5? Se sabe que el grado máximo de todos los vértices del árbol es igual a 5.

Ejercicio 5 Hallar la mínima cantidad de aristas que se debe eliminar a K_n para que quede desconectado en 2 componentes conexas, ninguna de las cuales sea un vértice aislado.

Ejercicio 6

(a) Probar que todo árbol con al menos dos vértices tiene al menos dos hojas.

(b) Probar que si $G = (V, E)$ es un árbol entonces $|E| = |V| - 1$.

(c) Probar que si $G' = (V', E')$ es un grafo acíclico entonces $|E'| \leq |V'| - 1$.

(d) Probar que si $G^* = (V^*, E^*)$ es un grafo conexo entonces $|E^*| \geq |V^*| - 1$.

(e) Mostrar algún grafo $G = (V, E)$ que no sea un árbol pero que cumpla que $|E| = |V| - 1$.

Ejercicio 7 Sean a y c dos vértices a distancia 2 en C_4. Determinar la cantidad de caminos de largo n en C_4 que empiezan en a y terminan en c.

Ejercicio 8

(a) Determinar la cantidad de triángulos que tiene K_n.

(b) Determinar la cantidad de caminos simples no triviales que tiene $K_{1,n}$.

(c) Determinar la cantidad de k-ciclos que hay en la rueda W_n.

Ejercicio 9
El hipercubo H_n de dimensión n, es el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas.

(a) Hallar los conjuntos de vértices de H_1, H_2, H_3 y dibuje dichos grafos.

(b) ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n?

(c) Hallar 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.

(d) Demostrar que H_n no tiene 3-ciclos.

(e) ¿Cuántos 4-ciclos tiene H_n?

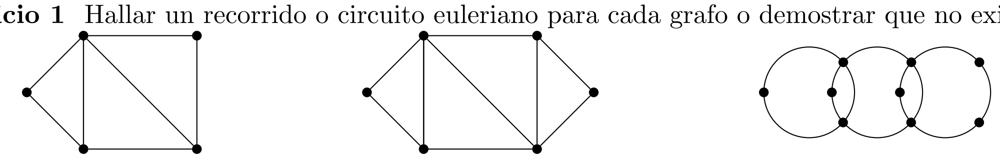
Sugerencia: considerar un vértice fijo y determinar la cantidad de 4-ciclos que contienen a tal vértice.

Ejercicio 10 Determinar la cantidad de árboles recubridores de los grafos K_3, K_4 y K_5.

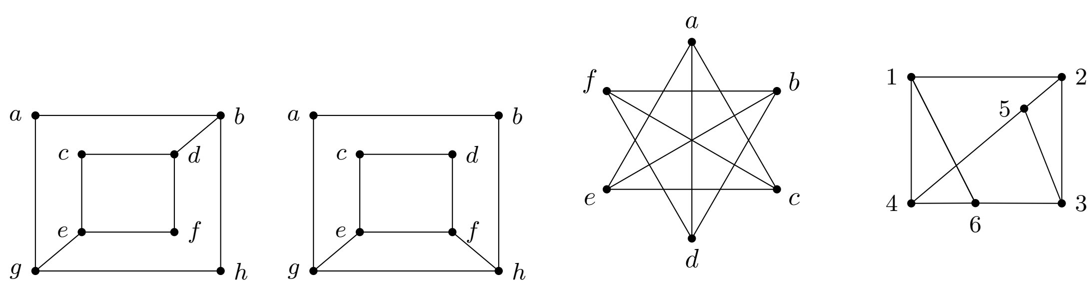
Ejercicio 11 Probar que en un grafo conexo todo par de caminos simples *con longitudes la mayor posible* tienen algún vértice en común. Demostrar que la proposición es falsa si se cambia la frase en itálica por *con longitud igual al diámetro* y también es falsa si se cambia por *maximales.*

9. Isomorfismos, Grafos Eulerianos y Hamiltonianos (Secciones 11.2, 11.3 y 11.5)

Ejercicio 1 Hallar un recorrido o circuito euleriano para cada grafo o demostrar que no existe.



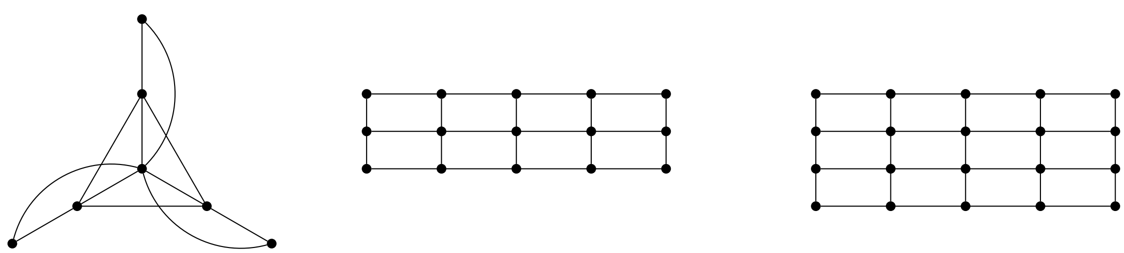
Ejercicio 2 Para cada par de grafos de la Figura 2 determinar si los grafos son o no isomorfos.



(a) **(b)**

Figura 2

Ejercicio 3
Encontrar un ciclo Hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la figura.



Ejercicio 4
Sea $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ los conjuntos de grafos Eulerianos y Hamiltonianos respectivamente. Dar un ejemplo de un grafo en $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$, otro en $\mathcal{H} \setminus \mathcal{E}$ y otro en $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$.

Ejercicio 5

(a) Determinar el número de vértices de un grafo simple 3-regular con 9 aristas.

(b) Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.

(c) ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

Ejercicio 6
Determinar los valores de n para los cuales K_n tiene un circuito/recorrido euleriano.

Ejercicio 7
Hallar el máximo número de aristas que se le puede quitar a K_n sin que el grafo deje de ser conexo.

Ejercicio 8

(a) Demostrar que dos grafos son isomorfos si y sólo si sus grafos complemento lo son.

(b) ¿Cuáles de los grafos de la Figura 3 son isomorfos?

(c) Determinar el número de aristas de $\bar{G}$ en función del número de aristas de G.

(d) Determinar el número de aristas de un grafo autocomplementario de n vértices.

(e) Construir grafos autocomplementarios con 4 y con 5 vértices.

(f) Determinar para qué valores de n existe un grafo autocomplementario de n vértices. *Sugerencia:* Demostrar que n debe ser de la forma $4k$ o $4k+1$. Para $n = 4k$, generalizar la estructura del grafo autocomplementario de orden 4 agrupando los vértices en cuatro grupos. Para $n = 4k+1$ agregar un vértice al grafo anterior y unir en forma adecuada.

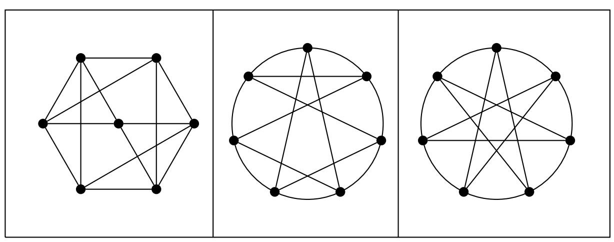


Figura 3

Ejercicio 9 Representar a todos los árboles no isomorfos con 6 vértices.

Ejercicio 10
Sea n un entero positivo. Determinar la longitud máxima de un recorrido en K_{2n+1}.

Ejercicio 11 Probar que existen infinitos grafos simples conexos y 3-regulares.

Ejercicio 12 Demostrar que en una reunión de 6 personas cualesquiera siempre existen al menos 3 personas que se conocen entre sí o al menos 3 personas que no se conocen ninguna de ellas (pueden ocurrir ambas).

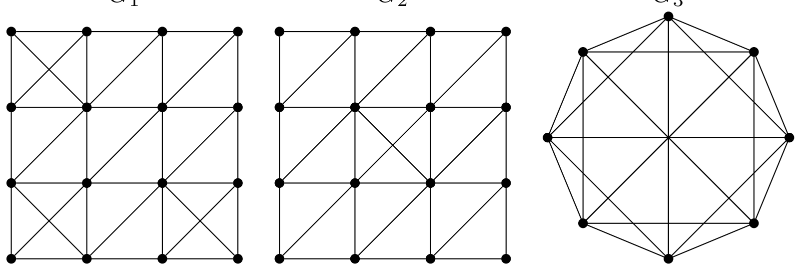
10. Planaridad y Coloración (Secciones 11.4 y 11.6)

Ejercicio 1

(a) Determine cuáles de los grafos de la Figura 4 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.

(b) Para los grafos planos de la parte anterior determinar el número de vértices, aristas y regiones del mismo. Chequear que sus respuestas satisfacen la fórmula de Euler.

G_1 G_2 G_3



(parcial 2001) (parcial 2001) (parcial 2000)

Figura 4

Ejercicio 2

Sea $G = (V, E)$ un grafo no plano. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener $|E|$?

Ejercicio 3

Probar que si el grado máximo de los vértices de un grafo es 2, entonces el grafo es plano. ¿Es cierto el recíproco?

Ejercicio 4

Generalizar el Teorema de las regiones de Euler: probar que todo grafo plano $G = (V, E)$ con κ componentes conexas verifica que $|V| - |E| + r = \kappa + 1$.

Ejercicio 5

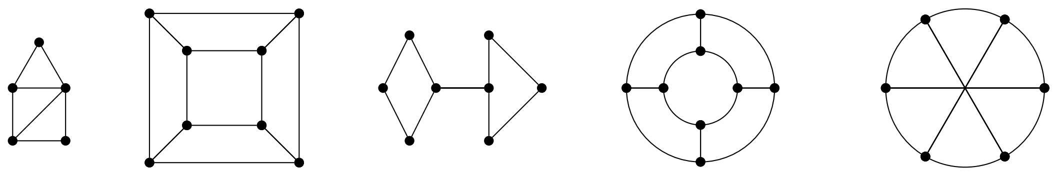
Hallar la menor cantidad de vértices que puede tener un grafo simple, plano, conexo y 3-regular, tal que cada una de sus regiones tiene al menos 5 vértices.

Ejercicio 6

Demostrar que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.

Ejercicio 7 Demostrar que todo grafo plano se puede colorear con seis colores.

Ejercicio 8 Encotrar el número cromático de los siguientes grafos.



Ejercicio 9
Hallar el polinomio cromático de C_n, K_n, $\overline{K_n}$, P_n, $K_{2,n}$ y K_5 menos una arista. Deducir el número cromático de cada grafo y la cantidad de coloraciones usando 5 colores o menos.

Ejercicio 10 Sea G un grafo con 4 vértices que tiene una arista e de G tal que $p_{G-e}(2) = p_G(2) = 2$. Hallar $p_G(3)$.

Ejercicio 11 Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} gr(v)$.

(a) Demostrar que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

(b) Dar un ejemplo de grafo que cumpla la igualdad.

Ejercicio 12 Demostrar que $\chi(G) \leq 2$ si y sólo si G no tiene ciclos impares.