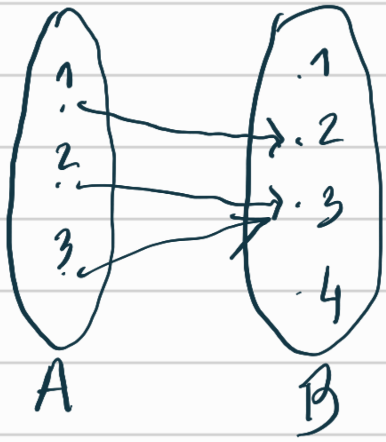
Clase 2 : Funciones

Def. Sean A, B conjuntos.
Una función $f: A \to B$ asigna a cada $x \in A$ un único elemento $y = f(x) \in B$.

Ejemplo: $f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$ dada por

x	$f(x)$
1	2
2	3
3	3



Nomenclatura: Sea $f: A \to B$

- $A = \mathrm{Dom}(f)$ (dominio de f)
- $B = \mathrm{Cod}(f)$ (codominio de f)
- $\mathrm{Rec}(f) = \{f(x) : x \in A\}$ (Recorrido o imagen de f)
  (o $\mathrm{Im}(f)$)

En el ejemplo anterior:

$\mathrm{Dom}(f) = \{1,2,3\}$
$\mathrm{Cod}(f) = \{1,2,3,4\}$
$\mathrm{Im}(f) = \{2,3\}$

Ejemplo: $g: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$
dado por

x	$g(x)$
1	2
2	3
3	3

Se tiene que $f \neq g$ pues $Cod(f) \neq Cod(g)$

Importante: Dos funciones f y g son iguales si
① $Dom(f) = Dom(g)$
② $Cod(f) = Cod(g)$
③ $f(x) = g(x) \quad \forall x \in Dom(f) = Dom(g)$

Ejemplo: $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = x^2$
Son funciones diferentes.

dominio codominio

Def: Sea $f: A \to B$ una función

- Decimos que f es inyectiva si $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Equivalentemente, f es inyectiva si
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

implica

- Decimos que f es sobreyectiva si $\forall y \in B, \exists x \in A \,/\, f(x) = y$

f es sobreyectiva $\overset{def}{\iff}$ $\forall y \in B, \exists x \in A / f(x) = y$

para todo — existe

$\exists!$ — existe un único

$\nexists$ — no existe

- f es biyectiva $\overset{def}{\iff}$ f es inyectiva y sobreyectiva

$\iff \forall y \in B, \exists! x \in A / f(x) = y$.

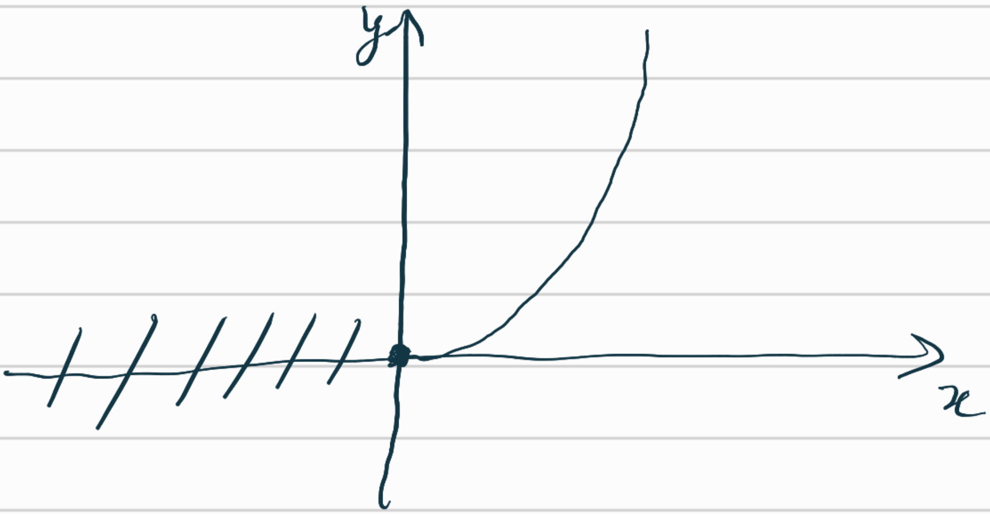
<u>Ejemplo:</u> $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} / f(x) = x^2$

Inyectividad: Si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ o $x_1 = -x_2$

Como $x_1, x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 = x_2$.

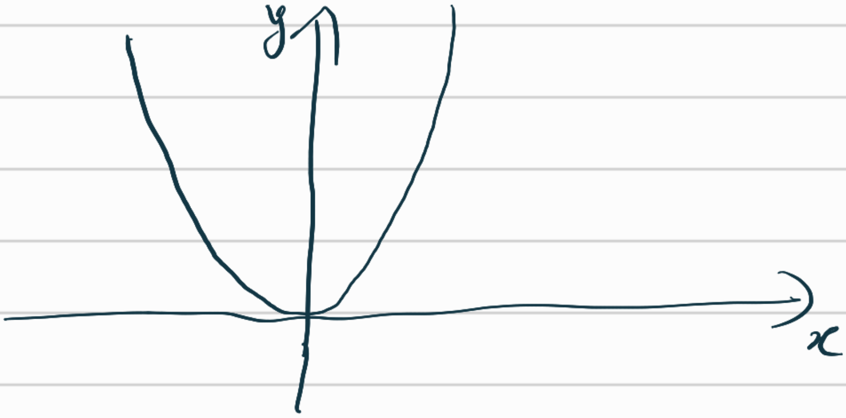
por lo tanto — $\therefore$ f es inyectiva



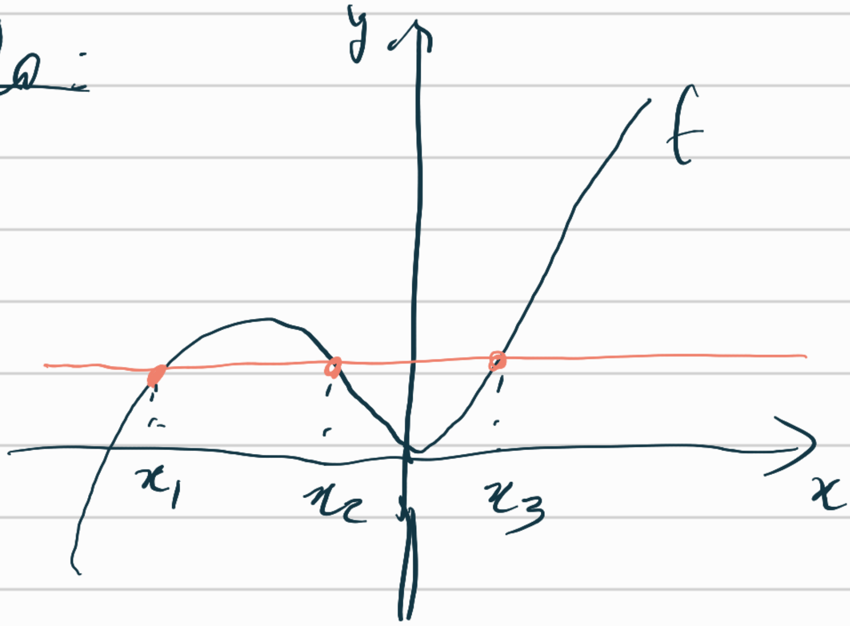
Ejemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \; / \; f(x) = x^2$

¿f es inyectiva?

No: $f(2) = f(-2)$ y $2 \neq -2 \Rightarrow f$ no es inyectiva.

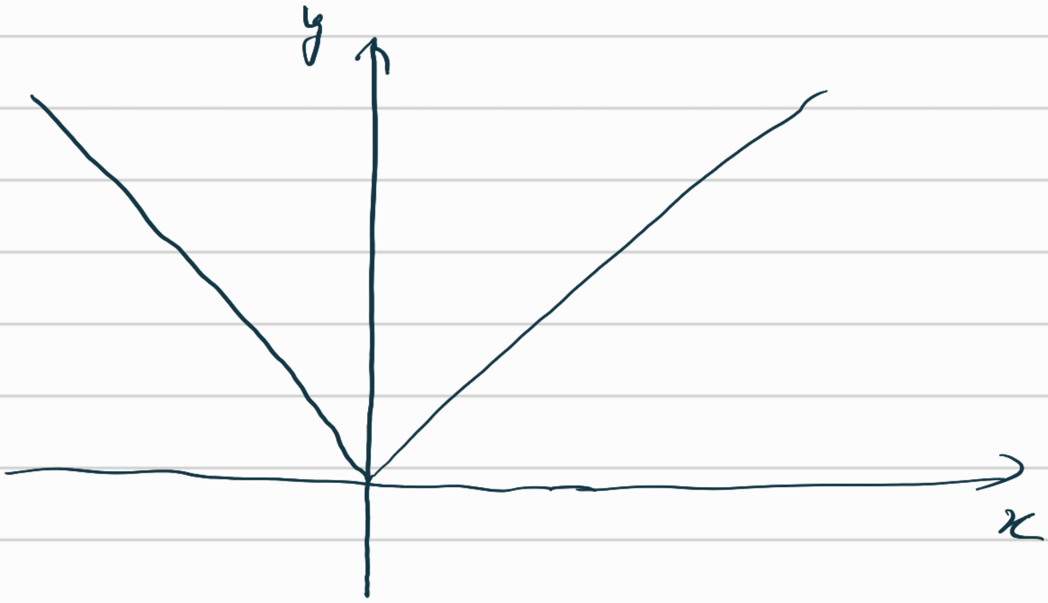


Ejemplo:



$x_1 \neq x_2$ pero $f(x_1) = f(x_2) \to f$ no es inyectiva.

Ejemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; / \; f(x) = |x|$



No es inyectivo pues $f(1)=f(-1)$.
No es sobreyectivo: $Rec(f)=[0,+\infty) \neq \mathbb{R}=Cod(f)$
$-1 \notin Rec(f)$.

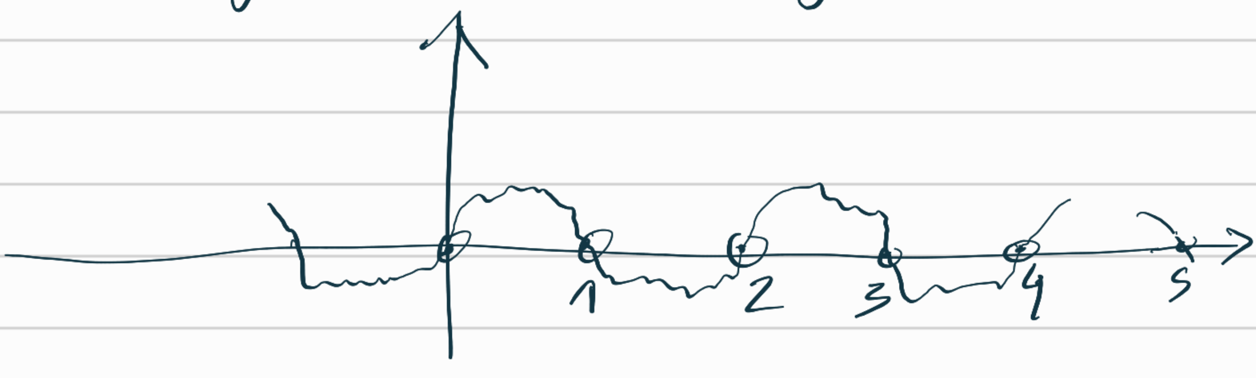
Ejemplo: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ / $f(x)=\dfrac{(x^2-1)\,\operatorname{sen}^3(\pi x)}{Tg^2(x)+1}$

¿f es inyectivo?

$f(0)=f(1)=0$ y $0\neq 1 \Rightarrow f$ no es inyectivo.

$$f(0)=\frac{(0^2-1)\,\operatorname{sen}^3(\pi.0)}{tg^2(0)+1}=\frac{(-1).\overbrace{\operatorname{sen}^3(0)}^{=0}}{2}=0$$

$$f(1)=\frac{(1^2-1).\operatorname{sen}^3(\pi.1)}{tg^2(1)+1}=\frac{0.\operatorname{sen}^3(\pi)}{tg^2(1)+1}=0$$

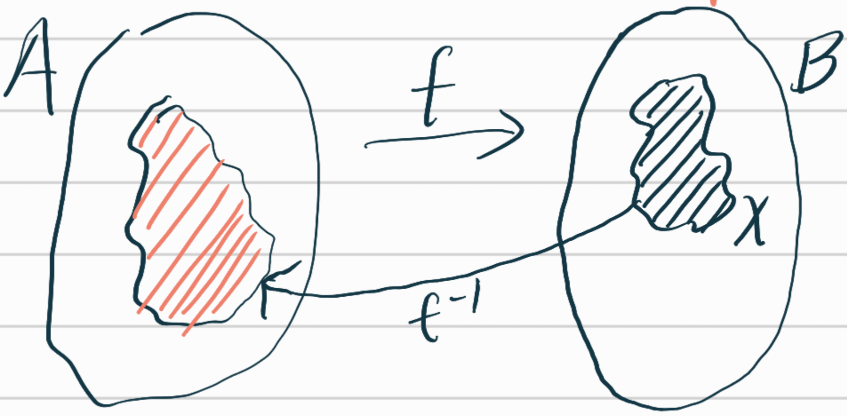


Def. (Conjunto preimagen): Sea $f: A \to B$ función.

Sea $X \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(X) = \{x \in A / f(x) \in X\}$

conjunto preimagen de X por f.

(Obs: $f^{-1}(X) \subseteq A$)



Ejemplo: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2 + 1$

$$f^{-1}([0,1]) = ?$$

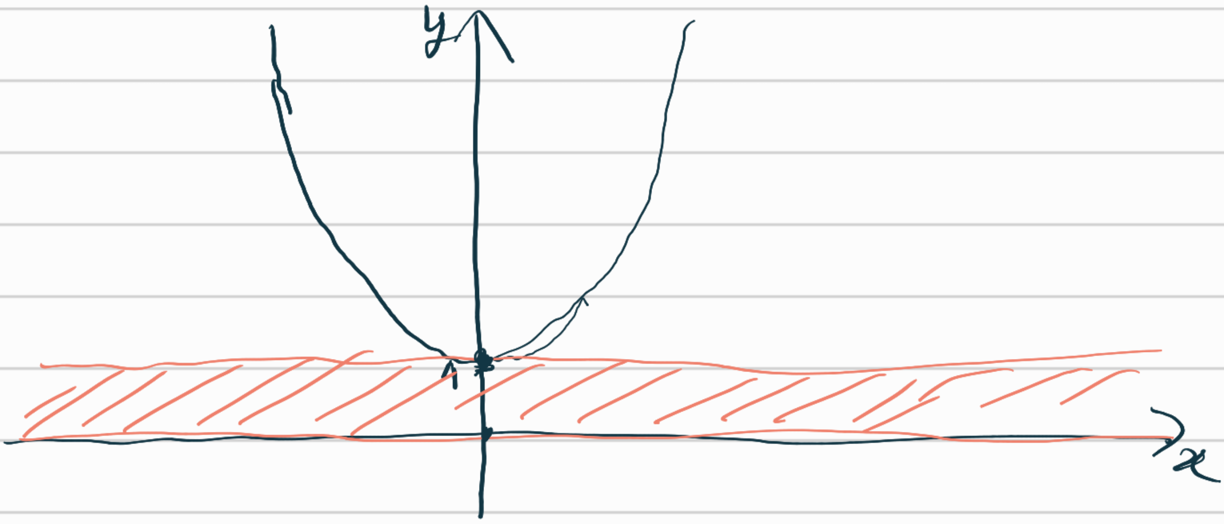
$([0,1] := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\})$

Queremos hallar $x \in \mathbb{R} / f(x) \in [0,1]$

$$0 \leq x^2 + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$f^{-1}([0,1]) = \{0\}$

$f^{-1}((0,1)) = \emptyset$



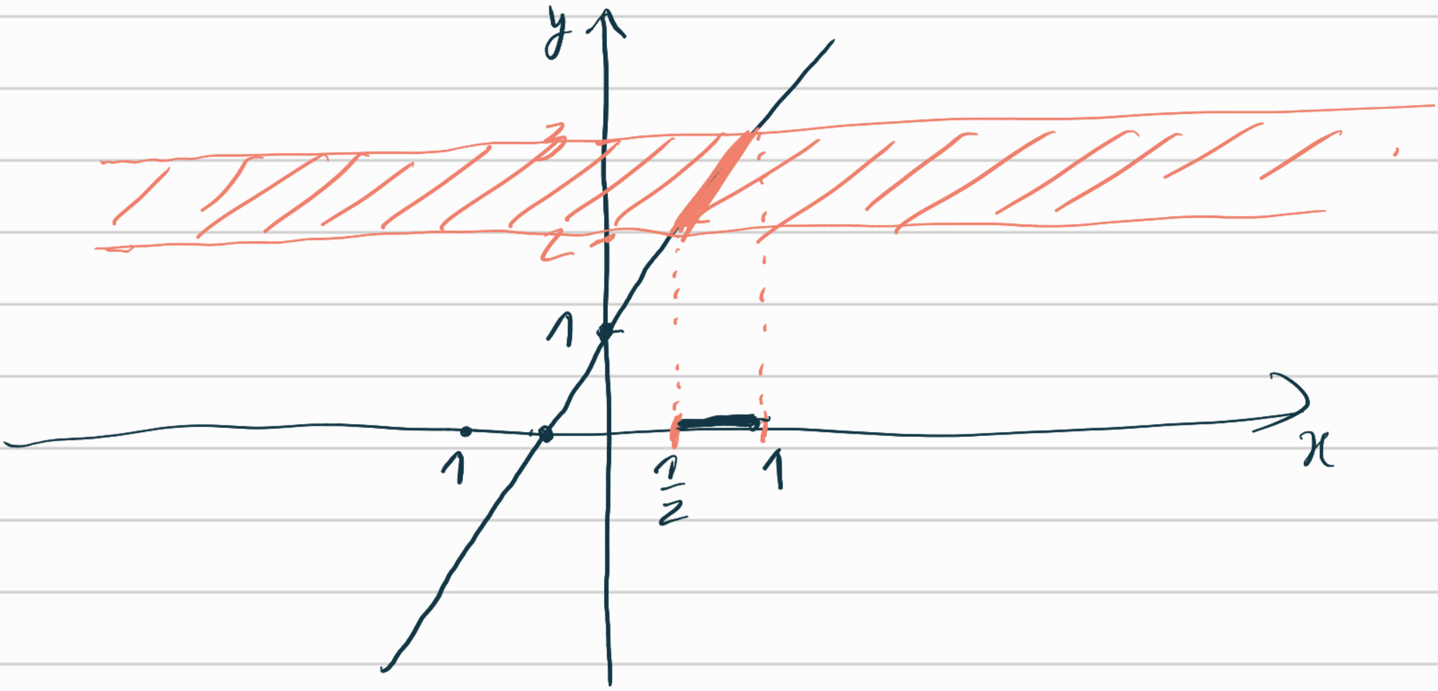
Ejemplo: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = 2x+1$

$$f^{-1}([2,3)) = ?$$

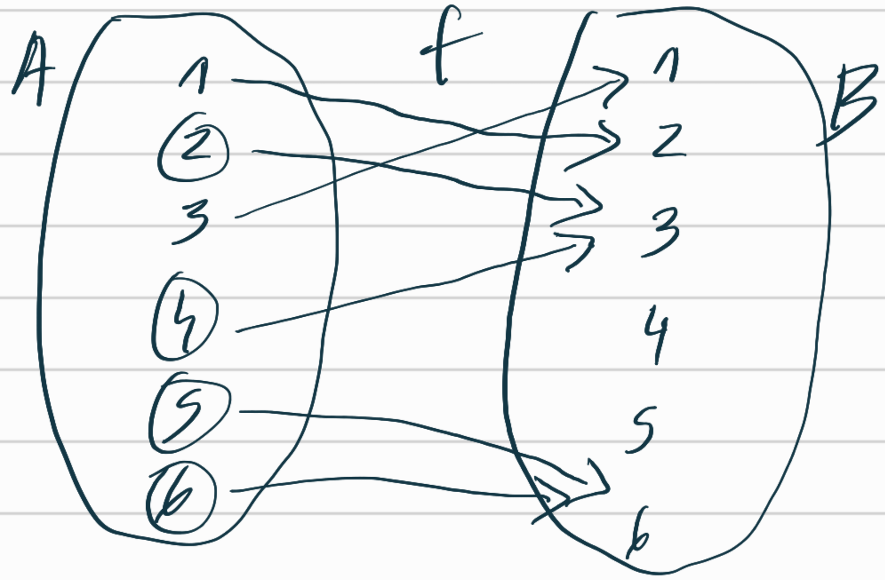
Queremos dar los $x \in \mathbb{R}$ / $f(x) \in [2,3)$

$$2 \leq f(x) < 3 \iff 2 \leq 2x+1 < 3$$
$$\iff 1 \leq 2x < 2$$
$$\iff 1/2 \leq x < 1$$

$$f^{-1}([2,3)) = [1/2, 1)$$



Ejemplo:



$X = \{3, 4, 6\}$

$$f^{-1}(\{3,4,6\}) = \{2,4,5,6\}$$

$$f^{-1}(\{2\}) = \{1\}$$

$$f^{-1}(\{3\}) = \{2,4\}$$

$$f^{-1}(\{4\}) = \phi \leftarrow f \text{ no es sobreyectiva.}$$

Obs: Sea $f : A \to B$ una función

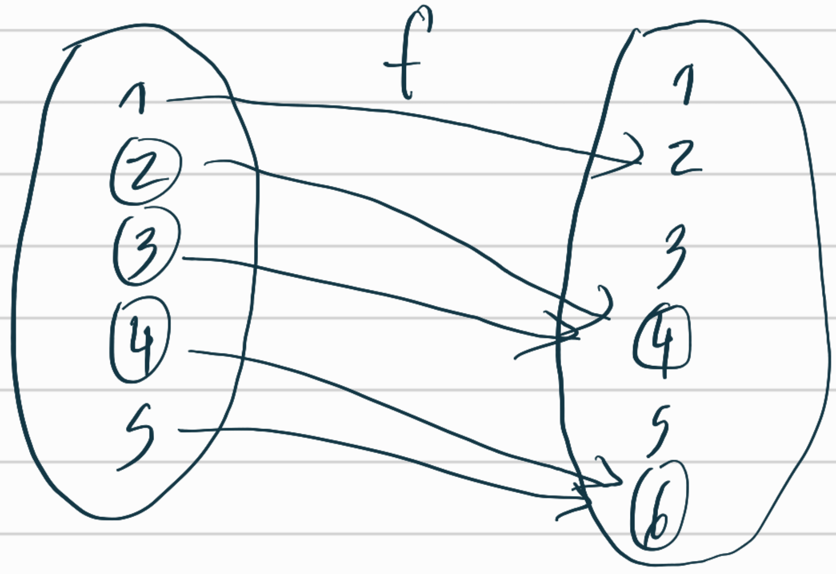
f es sobreyectiva $\Leftrightarrow f^{-1}(\{b\}) \neq \phi, \forall b \in B$

Def: Sea $f : A \to B$ una función, $X \subseteq A$

el "conjunto imagen de X por f"

es $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$

Ejemplo:



$X = \{2, 3, 4\} \Rightarrow f(X) = \{4, 6\}$

Ejercicio: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = 3x - 1$

$f(\mathbb{R}^+) = (-1, +\infty)$ ←

$f^{-}(\mathbb{R}^+) = (1/3, +\infty)$ ←

- $x > 0 \Leftrightarrow 3x > 0 \Leftrightarrow 3x - 1 > -1$
  $\Leftrightarrow f(x) > -1$

- $3x - 1 > 0 \Leftrightarrow 3x > 1 \Leftrightarrow \boxed{x > 1/3}$