Repaso: Espectro, filtros y procesamiento multitasa

G. Belcredi, P. Belzarena

Comunicaciones inalámbricas

2023

Tabla de contenidos

1. Repaso de espectro, transformadas y teorema de muestreo

2. Repaso de Filtros Digitales

3. Procesamiento multitasa

Espectro, transformadas y teorema de muestreo

Espectro

Serie de Fourier de una señal periódica

- ¿Qué componentes de frecuencia tiene una función periódica?
- Con la S.F. descomponemos una función $u(t)$ periódica de período T en funciones $e^{j2\pi kt/T}$ con $k \in \mathbb{N}$.

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{j2\pi kt/T}.$$

$$U_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)e^{-j2\pi kt/T}dt$$

Espectro

Serie de Fourier de una señal periódica

- ¿Qué componentes de frecuencia tiene una función periódica?
- Con la S.F. descomponemos una función $u(t)$ periódica de período T en funciones $e^{j2\pi kt/T}$ con $k \in \mathbb{N}$.

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{j2\pi kt/T}.$$

$$U_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-j2\pi kt/T} dt$$

Espectro

Serie de Fourier de una señal periódica

- ¿Qué componentes de frecuencia tiene una función periódica?
- Con la S.F. descomponemos una función $u(t)$ periódica de período T en funciones $e^{j2\pi kt/T}$ con $k \in \mathbb{N}$.

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{j2\pi kt/T}.$$

$$U_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)e^{-j2\pi kt/T}dt$$

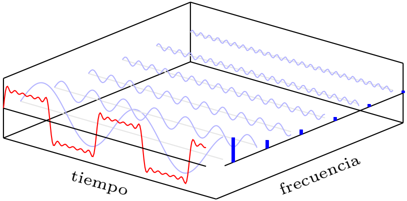
Espectro

Serie de Fourier de una señal periódica

- ¿Qué componentes de frecuencia tiene una función periódica?
- Con la S.F. descomponemos una función $u(t)$ periódica de período T en funciones $e^{j2\pi kt/T}$ con $k \in \mathbb{N}$.

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_k e^{j2\pi kt/T}.$$

$$U_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)e^{-j2\pi kt/T}dt$$

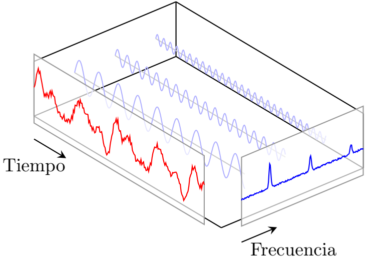


Espectro

Transformada de Fourier de tiempo continuo

- La Transformada de Fourier de Tiempo Continuo de una función $u(t) \in \mathcal{L}_2$ es:

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j2\pi f t}dt$$



- La inversa queda dada por:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(f)e^{j2\pi f t}df$$

Espectro

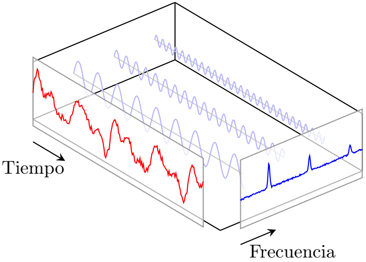
Transformada de Fourier de tiempo continuo

- La Transformada de Fourier de Tiempo Continuo de una función $u(t) \in \mathcal{L}_2$ es:

$$U(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- La inversa queda dada por:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(f) e^{j2\pi f t} df$$



Frame Title

Cuadro: Pares comunes de la Transformada de Fourier

$x(t)$	$X(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$u(t)$ (Función escalón)	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$
$rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\mathrm{sinc}(fT)$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$

Cuadro: Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo continuo

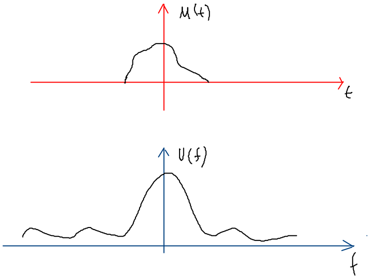
Propiedad	**Relación tiempo-frecuencia**
Linealidad	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)$
Desplazamiento temporal	$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f t_0} X(f)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f - f_0)$
Escalamiento temporal	$x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
Derivada	$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{\mathcal{F}} (j2\pi f)^n X(f)$
Convolución	$x(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \cdot H(f)$
Multiplicación	$x(t) \cdot h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(f) * H(f)$
Teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t) \rvert^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(f) \rvert^2 df$

Espectro

Transformadas y espectro

- Soporte acotado en el tiempo $\longrightarrow$ Soporte acotado en frecuencia
- Soporte acotado en frecuencia $\longrightarrow$ Soporte acotado en el tiempo

Figura: Transformada de Fourier y Soporte



Espectro

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

- Sucesión de complejos $u[k]$ con $k \in \mathbb{Z}$, tales que $\sum_k |u[k]|^2 < \infty$. La DTFT queda dada por:

$$U_{DTFT}(\Omega) = U(e^{j\Omega}) = \sum_k u[k]e^{-j\Omega k}$$

- Transformada inversa:

$$u[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\Omega})e^{j\Omega k}d\Omega$$

- Ω representa la frecuencia en sistemas discretos, tiene unidades de radianes por muestra. Está asociada a la frecuencia de muestreo, $\Omega = \omega T = 2\pi f/f_s$.
- $U(e^{j\Omega})$ es periódica en Ω con período 2π

Espectro

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

- Sucesión de complejos $u[k]$ con $k \in \mathbb{Z}$, tales que $\sum_k |u[k]|^2 < \infty$. La DTFT queda dada por:

$$U_{DTFT}(\Omega) = U(e^{j\Omega}) = \sum_k u[k]e^{-j\Omega k}$$

- Transformada inversa:

$$u[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\Omega})e^{j\Omega k} d\Omega$$

- Ω representa la frecuencia en sistemas discretos, tiene unidades de radianes por muestra. Está asociada a la frecuencia de muestreo, $\Omega = \omega T = 2\pi f/f_s$.
- $U(e^{j\Omega})$ es periódica en Ω con período 2π

Espectro

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

- Sucesión de complejos $u[k]$ con $k \in \mathbb{Z}$, tales que $\sum_k |u[k]|^2 < \infty$. La DTFT queda dada por:

$$U_{DTFT}(\Omega) = U(e^{j\Omega}) = \sum_k u[k] e^{-j\Omega k}$$

- Transformada inversa:

$$u[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\Omega}) e^{j\Omega k} d\Omega$$

- Ω representa la frecuencia en sistemas discretos, tiene unidades de radianes por muestra. Está asociada a la frecuencia de muestreo, $\Omega = \omega T = 2\pi f / f_s$.
- $U(e^{j\Omega})$ es periódica en Ω con período 2π

Espectro

Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

- Sucesión de complejos $u[k]$ con $k \in \mathbb{Z}$, tales que $\sum_k |u[k]|^2 < \infty$. La DTFT queda dada por:

$$U_{DTFT}(\Omega) = U(e^{j\Omega}) = \sum_k u[k]e^{-j\Omega k}$$

- Transformada inversa:

$$u[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\Omega})e^{j\Omega k}d\Omega$$

- Ω representa la frecuencia en sistemas discretos, tiene unidades de radianes por muestra. Está asociada a la frecuencia de muestreo, $\Omega = \omega T = 2\pi f/f_s$.
- $U(e^{j\Omega})$ es periódica en Ω con período 2π

Cuadro: Propiedades de la Transformada de Fourier en tiempo discreto

Propiedad	**Relación tiempo-frecuencia**
Linealidad	$a_1x[n] + a_2y[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} a_1X(e^{j\Omega}) + a_2Y(e^{j\Omega})$
Desplazamiento temporal	$x[n-n_0] \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\Omega n_0}X(e^{j\Omega})$
Convolución	$x[n] * y[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega})$
Multiplicación	$x[n]y[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}X(e^{j\Omega}) * Y(e^{j\Omega})$
Teorema de Parseval	$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \lvert X(e^{j\Omega})\rvert^2 d\Omega$

Espectro

Relación TF a DTFT

Relación entre transformadas

Supongamos que tenemos:

- $u(t)$: señal bandabase con ancho de banda B
- $(u[k])$: una secuencia definida como $u[k] = u(kT)$
- Se cumple el teorema de muestreo, es decir: $T \leq 1/2B$
- $U(e^{j\Omega})$: la transformada de Fourier en tiempo discreto de $(u[k])$
- $U(f)$: la transformada de Fourier de $u(t)$

Entonces se cumple la siguiente igualdad para $-\pi \leq \Omega \leq \pi$:

$$U(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} U\left(\frac{\Omega}{2\pi T}\right).$$

Espectro

Relación TF a DTFT

Relación entre transformadas

Supongamos que tenemos:

- $u(t)$: señal bandabase con ancho de banda B
- $(u[k])$: una secuencia definida como $u[k] = u(kT)$
- Se cumple el teorema de muestreo, es decir: $T \leq 1/2B$
- $U(e^{j\Omega})$: la transformada de Fourier en tiempo discreto de $(u[k])$
- $U(f)$: la transformada de Fourier de $u(t)$

Entonces se cumple la siguiente igualdad para $-\pi \leq \Omega \leq \pi$:

$$U(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} U\left(\frac{\Omega}{2\pi T}\right).$$

Espectro

Relación TF a DTFT

Relación entre transformadas

Supongamos que tenemos:

- $u(t)$: señal bandabase con ancho de banda B
- $(u[k])$: una secuencia definida como $u[k] = u(kT)$
- Se cumple el teorema de muestreo, es decir: $T \leq 1/2B$
- $U(e^{j\Omega})$: la transformada de Fourier en tiempo discreto de $(u[k])$
- $U(f)$: la transformada de Fourier de $u(t)$

Entonces se cumple la siguiente igualdad para $-\pi \leq \Omega \leq \pi$:

$$U(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} U\left(\frac{\Omega}{2\pi T}\right).$$

Espectro

Relación TF a DTFT

Relación entre transformadas

Supongamos que tenemos:

- $u(t)$: señal bandabase con ancho de banda B
- $(u[k])$: una secuencia definida como $u[k] = u(kT)$
- Se cumple el teorema de muestreo, es decir: $T \leq 1/2B$
- $U(e^{j\Omega})$: la transformada de Fourier en tiempo discreto de $(u[k])$
- $U(f)$: la transformada de Fourier de $u(t)$

Entonces se cumple la siguiente igualdad para $-\pi \leq \Omega \leq \pi$:

$$U(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} U\left(\frac{\Omega}{2\pi T}\right).$$

Espectro
Relación TF a DTFT

Relación entre transformadas

Supongamos que tenemos:

- $u(t)$: señal bandabase con ancho de banda B
- $(u[k])$: una secuencia definida como $u[k] = u(kT)$
- Se cumple el teorema de muestreo, es decir: $T \leq 1/2B$
- $U(e^{j\Omega})$: la transformada de Fourier en tiempo discreto de $(u[k])$
- $U(f)$: la transformada de Fourier de $u(t)$

Entonces se cumple la siguiente igualdad para $-\pi \leq \Omega \leq \pi$:

$$U(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} U\left(\frac{\Omega}{2\pi T}\right).$$

Espectro

Relación TF a DTFT

Relación entre transformadas

Supongamos que tenemos:

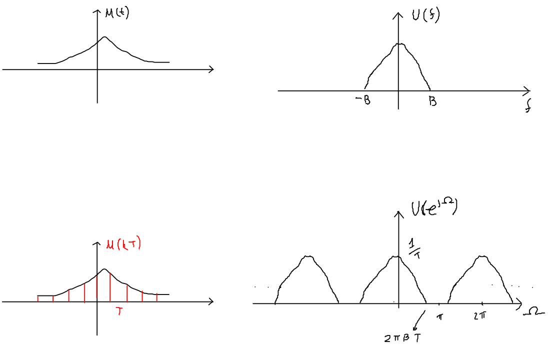
- $u(t)$: señal bandabase con ancho de banda B
- $(u[k])$: una secuencia definida como $u[k] = u(kT)$
- Se cumple el teorema de muestreo, es decir: $T \leq 1/2B$
- $U(e^{j\Omega})$: la transformada de Fourier en tiempo discreto de $(u[k])$
- $U(f)$: la transformada de Fourier de $u(t)$

Entonces se cumple la siguiente igualdad para $-\pi \leq \Omega \leq \pi$:

$$U(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} U\left(\frac{\Omega}{2\pi T}\right).$$

Espectro

Transformadas y espectro



Espectro

Teorema de muestreo

Teorema de muestreo

- Cualquier función que resulte de anti-transformar por Fourier una función $\mathcal{L}_2$ de soporte acotado en $[-B, B]$ se puede recuperar a partir de sus muestras tomadas a una tasa $1/T \geq 2B$ muestras por segundo.

- Aquellas funciones que se pueden reconstruir de esta forma se denominan *bandabase*.
- Se puede reconstruir la señal original mediante:

$$u(t) = BT \sum_k u(kT) \operatorname{sinc}(B(t - kT))$$

Espectro

Teorema de muestreo

Teorema de muestreo

- Cualquier función que resulte de anti-transformar por Fourier una función $\mathcal{L}_2$ de soporte acotado en $[-B, B]$ se puede recuperar a partir de sus muestras tomadas a una tasa $1/T \geq 2B$ muestras por segundo.

- Aquellas funciones que se pueden reconstruir de esta forma se denominan *bandabase*.
- Se puede reconstruir la señal original mediante:

$$u(t) = BT \sum_k u(kT) \operatorname{sinc}(B(t - kT))$$

Espectro

Teorema de muestreo

Teorema de muestreo

- Cualquier función que resulte de anti-transformar por Fourier una función $\mathcal{L}_2$ de soporte acotado en $[-B, B]$ se puede recuperar a partir de sus muestras tomadas a una tasa $1/T \geq 2B$ muestras por segundo.

- Aquellas funciones que se pueden reconstruir de esta forma se denominan *bandabase*.
- Se puede reconstruir la señal original mediante:

$$u(t) = BT \sum_k u(kT) \operatorname{sinc}(B(t - kT))$$

Espectro

Transformada discreta de Fourier

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

La DFT de una secuencia $(u[k]) = \{u[0], u[1], \ldots, u[N-1]\}$ se define como:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} u[k] e^{-j2\pi nk/N}, \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

La transformada inversa se define como:

$$u[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{j2\pi nk/N}, \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

- Si $U(e^{j\Omega})$ es la DTFT de $u[k]$, ¿qué sucede si muestreo $U(e^{j\Omega})$ con N muestras equiespaciadas $2\pi/N$?

Espectro

Transformada discreta de Fourier

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

La DFT de una secuencia $(u[k]) = \{u[0], u[1], \ldots, u[N-1]\}$ se define como:

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} u[k] e^{-j2\pi nk/N}, \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

La transformada inversa se define como:

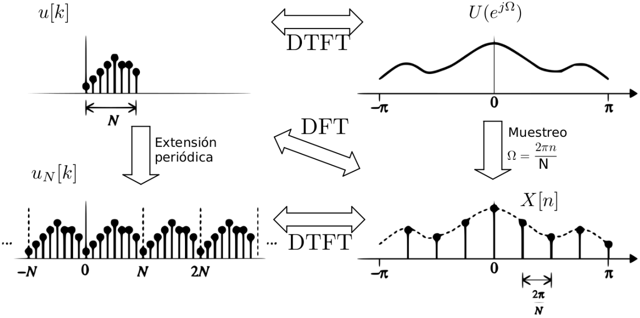
$$u[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{j2\pi nk/N}, \qquad n = 0, \ldots, N-1$$

- Si $U(e^{j\Omega})$ es la DTFT de $u[k]$, ¿qué sucede si muestreo $U(e^{j\Omega})$ con N muestras equiespaciadas $2\pi/N$?

Espectro

Transformada discreta de Fourier

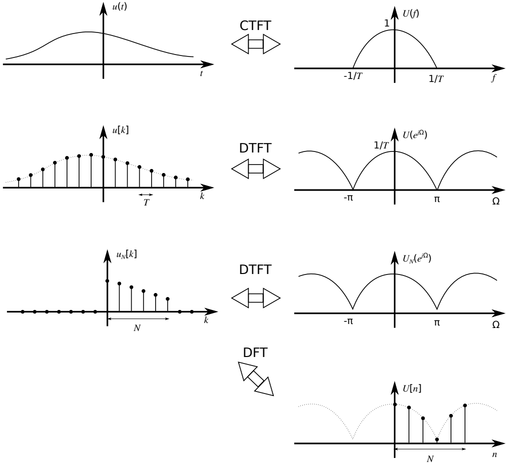
$$U(e^{j\Omega})|_{\Omega=\frac{2\pi n}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} u[k]e^{-j2\pi nk/N} = X[n]$$



- $u_N[k]$ es la extensión periódica de $u[k]$

Espectro

Relación entre transformadas



Transformada Z

- Problema: Analizar señales que no tienen DTFT (no cumplen: $\sum_k |u[k]|^2 < \infty$). Ejemplo: escalón en TD.
- Idea multiplico por $e^{-\sigma k}$ para que si tenga DTFT.

$$V(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]e^{-\sigma k}e^{-j\Omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]e^{-(\sigma+j\Omega)k}$$

Transformada Z

- Problema: Analizar señales que no tienen DTFT (no cumplen: $\sum_k |u[k]|^2 < \infty$). Ejemplo: escalón en TD.
- Idea multiplico por $e^{-\sigma k}$ para que si tenga DTFT.

$$V(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]e^{-\sigma k}e^{-j\Omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k]e^{-(\sigma+j\Omega)k}$$

Transformada Z

Definición y propiedades

Definiendo $z = e^{(\sigma + j\Omega)}$ y $U(z) = V(e^{j\Omega})$ obtenemos la expresión para la transformada Z de $u[k]$:

$$U(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} u[k] z^{-k},$$

$$u[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint U(z) z^{k-1} dz.$$

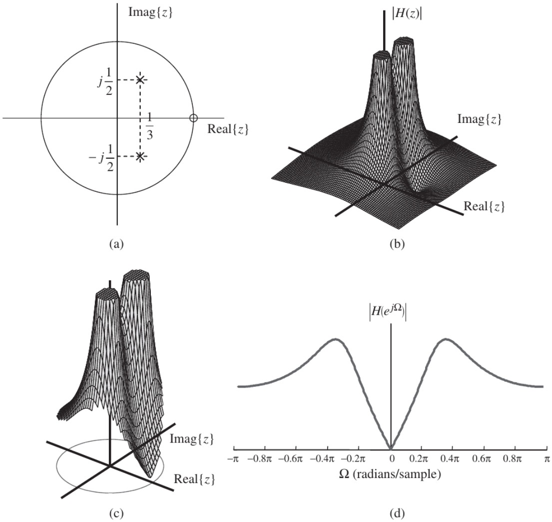
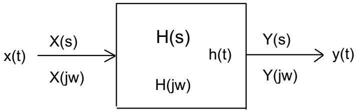


Figura: Relación entre Transformada Z y DTFT. Fuente: [1]

Filtros Digitales

Repaso de filtros digitales

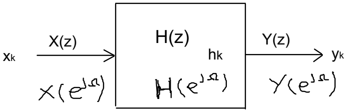
Filtros Digitales
Transferencia



$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(s) = X(s)\,H(s)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)\,H(j\omega)$$



$$y_k = x_k * h_k$$

$$Y(z) = X(z)\,H(z)$$

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})\,X(e^{j\Omega})$$

Filtros Digitales

Clasificación

Una clase importante de filtros son los que cumplen la siguiente relación entre la señal de entrada ($x[k]$) y la señal de salida ($y[k]$):

$$y[k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[k-m] - \sum_{n=1}^{N} a_n y[k-n]$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1 - \sum_{n=1}^{N} a_n z^{-n}}$$

- Llamamos a estos filtros: Filtros de respuesta al impulso infinita (IIR)
- En el caso particular que $a_n = 0 \quad \forall n$, los denominamos Filtros de respuesta al impulso finita (FIR).

Filtros Digitales

Clasificación

Una clase importante de filtros son los que cumplen la siguiente relación entre la señal de entrada ($x[k]$) y la señal de salida ($y[k]$):

$$y[k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[k-m] - \sum_{n=1}^{N} a_n y[k-n]$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1 - \sum_{n=1}^{N} a_n z^{-n}}$$

- Llamamos a estos filtros: Filtros de respuesta al impulso infinita (IIR)
- En el caso particular que $a_n = 0 \quad \forall n$, los denominamos Filtros de respuesta al impulso finita (FIR).

Filtros Digitales
Clasificación

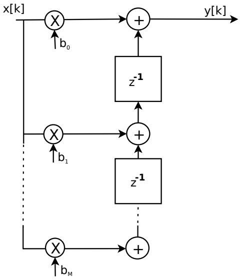


Figura: filtro FIR.

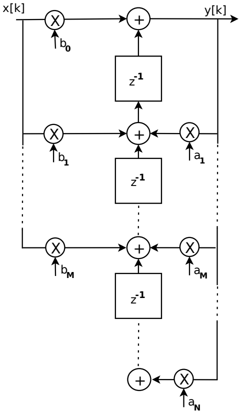


Figura: filtro IIR.

Procesamiento de señales multitasa

Procesamiento de señales multitasa

Sobremuestreo de la señal

Ejemplo sobremuestreo de tasa 2:

$y[k] = [\uparrow 2]x[k]$

- $x[k]$ es la secuencia $\{..., 4, 2, 7, 9, 14, ...\}$ donde la muestra en $k = 0$ corresponde al valor 7.
- $y[k] = \{..., 0, 4, 0, 2, 0, 7, 0, 9, 0, 14, 0, ...\}$.
- La entrada tendrá transformada Z: $X(z) = ... + 4z^2 + 2z + 7 + 9z^{-1} + 14z^{-2} + ...$
- La salida $Y(z) = ... + 4z^4 + 2z^2 + 7 + 9z^{-2} + 14z^{-4} + ...$
- De este ejemplo se puede ver que $Y(z) = X(z^2)$.

Procesamiento de señales multitasa

Sobremuestreo de la señal

Ejemplo sobremuestreo de tasa 2:

$y[k] = [\uparrow 2]x[k]$

- $x[k]$ es la secuencia $\{..., 4, 2, 7, 9, 14, ...\}$ donde la muestra en $k = 0$ corresponde al valor 7.
- $y[k] = \{..., 0, 4, 0, 2, 0, 7, 0, 9, 0, 14, 0, ...\}$.
- La entrada tendrá transformada Z: $X(z) = ... + 4z^2 + 2z + 7 + 9z^{-1} + 14z^{-2} + ...$
- La salida $Y(z) = ... + 4z^4 + 2z^2 + 7 + 9z^{-2} + 14z^{-4} + ...$
- De este ejemplo se puede ver que $Y(z) = X(z^2)$.

Procesamiento de señales multitasa

Sobremuestreo de la señal

Ejemplo sobremuestreo de tasa 2:

$y[k] = [\uparrow 2]x[k]$

- $x[k]$ es la secuencia $\{..., 4, 2, 7, 9, 14, ...\}$ donde la muestra en $k = 0$ corresponde al valor 7.
- $y[k] = \{..., 0, 4, 0, 2, 0, 7, 0, 9, 0, 14, 0, ...\}$.
- La entrada tendrá transformada Z:
  $X(z) = ... + 4z^2 + 2z + 7 + 9z^{-1} + 14z^{-2} + ...$
- La salida $Y(z) = ... + 4z^4 + 2z^2 + 7 + 9z^{-2} + 14z^{-4} + ...$
- De este ejemplo se puede ver que $Y(z) = X(z^2)$.

Procesamiento de señales multitasa

Sobremuestreo de la señal

Ejemplo sobremuestreo de tasa 2:

$y[k] = [\uparrow 2]x[k]$

- $x[k]$ es la secuencia $\{..., 4, 2, 7, 9, 14, ...\}$ donde la muestra en $k = 0$ corresponde al valor 7.
- $y[k] = \{..., 0, 4, 0, 2, 0, 7, 0, 9, 0, 14, 0, ...\}$.
- La entrada tendrá transformada Z: $X(z) = ... + 4z^2 + 2z + 7 + 9z^{-1} + 14z^{-2} + ...$
- La salida $Y(z) = ... + 4z^4 + 2z^2 + 7 + 9z^{-2} + 14z^{-4} + ...$
- De este ejemplo se puede ver que $Y(z) = X(z^2)$.

Procesamiento de señales multitasa

Sobremuestreo de la señal

Ejemplo sobremuestreo de tasa 2:

$y[k] = [\uparrow 2]x[k]$

- $x[k]$ es la secuencia $\{..., 4, 2, 7, 9, 14, ...\}$ donde la muestra en $k = 0$ corresponde al valor 7.
- $y[k] = \{..., 0, 4, 0, 2, 0, 7, 0, 9, 0, 14, 0, ...\}$.
- La entrada tendrá transformada Z:
  $X(z) = ... + 4z^2 + 2z + 7 + 9z^{-1} + 14z^{-2} + ...$
- La salida $Y(z) = ... + 4z^4 + 2z^2 + 7 + 9z^{-2} + 14z^{-4} + ...$
- De este ejemplo se puede ver que $Y(z) = X(z^2)$.

Procesamiento de señales multitasa

Sobremuestreo de la señal

Agrego L - 1 ceros entre cada par de muestras $y[k] = [\uparrow L]x[k]$

$$y[k] = \begin{cases} x[k/L] \text{ si } k/L \in \mathbb{Z}, \\ \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

$$Y(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y[k] z^{-k} = \sum_{k : k/L \in \mathbb{Z}} x[k/L] z^{-k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] z^{-nL} = X(z^L),$$

$$Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega L}). \tag{1}$$

Procesamiento de señales multitasa

Interpolador

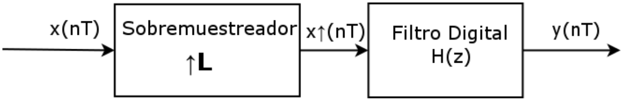


Figura: Interpolador

¿Cuál es la frecuencia de corte del filtro ?

Procesamiento de señales multitasa

Submuestreo de la señal

- Tasa de submuestreo M cualquiera, es decir $y[k] = [\downarrow M]x[k]$, o lo que es lo mismo

$$y[k] = x[Mk].$$

- Se puede calcular la relación entre el espectro de ambas:

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\Omega-2\pi m}{M}}).$$

Procesamiento de señales multitasa

Submuestreo de la señal

- Tasa de submuestreo M cualquiera, es decir $y[k] = [\downarrow M]x[k]$, o lo que es lo mismo

$$y[k] = x[Mk].$$

- Se puede calcular la relación entre el espectro de ambas:

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} X(e^{j\frac{\Omega-2\pi m}{M}}).$$

Procesamiento de señales multitasa

Submuestreo de la señal

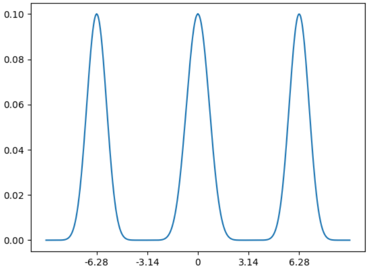


Figura: Señal antes del submuestreo

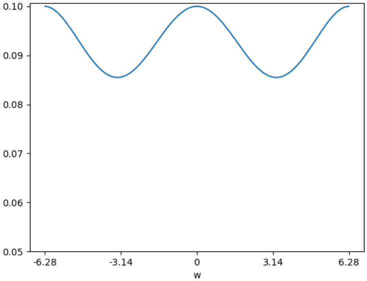


Figura: Señal después del submuestreo

Espectro

Submuestreo de la señal

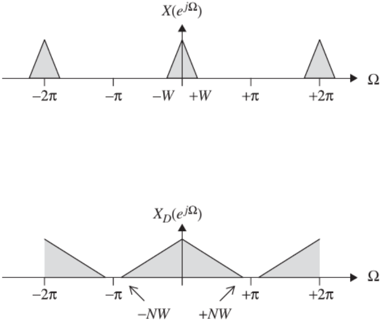


Figura: Espectro antes y después del submuestreo. Fuente: [1].

Procesamiento de señales multitasa

Decimador

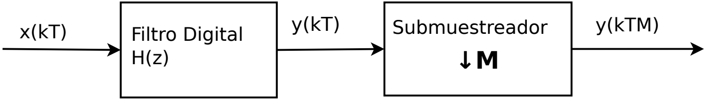


Figura: Decimador

¿Frecuencia de corte del filtro ?

Procesamiento de señales multitasa

Interpolador fraccional

Tenemos una señal muestreada a 48 kHz y debo enviarla a una tarjeta de audio de 44.1 kHz ¿cómo adapto las tasas?

Procesamiento de señales multitasa

Interpolador fraccional

Figura: Diagrama de un interpolador fraccional

¿Frecuencia de corte del filtro?

Referencias

Estos son temas clásicos y se pueden leer de muchos libros. Un libro clásico es: Discrete-Time Signal Processing de Oppenheim. Estos temas también están de forma más sucinta en el libro de Comina y en el libro de Rice.

[1] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer y J. R. Buck, *Discrete-time signal processing*, 2nd ed. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 1999, ISBN: 978-0-13-754920-7.

[2] P. Belzarena y F. Larroca, *Comunicaciones Inalámbricas: Notas del Curso*. 2017. dirección: `https://iie.fing.edu.uy/investigacion/grupos/artes/es/investigacion/libro-comunicaciones-inalambricas/` (visitado 04-05-2023).

[3] M. Rice, *Digital communications: a discrete-time approach*, en. Upper Saddle River, N.J: Pearson/Prentice Hall, 2009, OCLC: ocn191865672, ISBN: 978-0-13-030497-1.