ELECTROMAGNETISMO
PRÁCTICO I
ELECTROSTÁTICA I

Problema Nº 1

Tres cargas puntuales se encuentran alineadas. Las cargas de los extremos tienen signos positivo y magnitudes q_1y q_3. La carga del medio tiene signo negativo, magnitud q_2 y dista de las anteriores d_1 y d_2 respectivamente. Halle el cociente entre d_1 y d_2, y la relación entre las magnitudes de las tres cargas para que la configuración sea de equilibrio. ¿De qué tipo de equilibrio se trata? ¿El equilibrio es estable?

Problema Nº 2

Calcule el potencial electrostático (por integración directa) y el campo eléctrico (a partir del potencial) en un punto del eje, en los siguientes casos:

a) Un aro de radio a con una densidad lineal de carga uniforme λ.

b) Un disco de radio a y con densidad superficial de la carga uniforme σ (Sugerencia: puede utilizar el resultado de la parte a)). Halle el campo eléctrico debido a un plano cargado uniformemente como caso límite del disco.

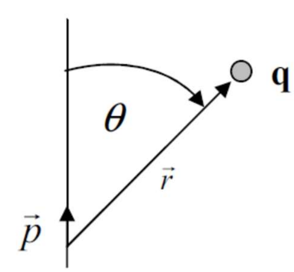
c) Una superficie esférica de radio a con la densidad superficial de carga uniforme σ (en este caso calcule en todo el espacio).

d) *i.* Una esfera de radio a con densidad volumétrica de carga uniforme ρ (en este caso calcule en todo el espacio).

ii. Halle el trabajo necesario para traer una carga q desde el infinito hasta el centro de la esfera.

Problema Nº 3

Se considera una carga puntual q y un dipolo puntual de momento $\vec{p} = p\hat{k}$.



a) Demuestre que el campo eléctrico debido al dipolo en la posición de la carga q es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3pcos\theta}{r^3}\hat{e}_r - \frac{p}{r^3}\hat{k}\right]$$

b) Calcule las fuerzas entre el dipolo y la carga puntual, en función de la distancia y el ángulo θ que forma $\vec{p}$ con la recta que los une. Verifique explícitamente que se cumple el principio de acción y reacción.

c) Repita lo anterior para los momentos de las fuerzas.

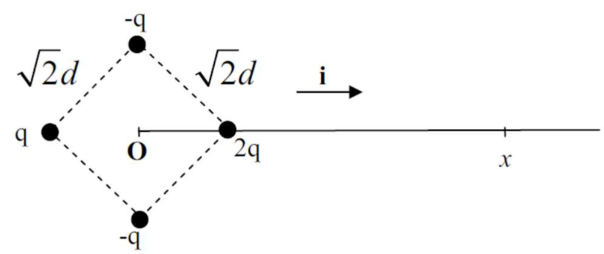
Problema Nº 4

a) *i.* Desarrolle el potencial electrostático generado por la distribución de la figura, a una distancia $x \gg d$ del centro sobre el eje Ox, en potencias de $1/x$ hasta $1/x^3$.

(Sugerencia: utilice el desarrollo $(1+z)^m \approx 1 + mz + \frac{1}{2}m(m-1)z^2$ para $z \ll 1$).

ii. A partir de *i.* deduzca el valor de la carga puntual y el dipolo (orientado según el eje Ox) que colocados en el origen aproximan el potencial de la distribución hasta el orden $1/x^2$.

b) Encuentre la carga neta y el momento dipolar de la distribución y compare con a) *ii*. Observe que el momento dipolar depende del origen.



Problema Nº 5

Halle el campo eléctrico en todo el espacio, a partir de la ley de Gauss, en los siguientes casos:

a) Carga puntual.

b) Cascarón esférico uniforme cargado con densidad σ.

c) Plano infinito uniformemente cargado.

d) Esfera maciza con densidad volumétrica $\rho(r)$ en los siguientes casos:

i. $\rho(r) = \rho_0$

ii. $\rho(r) = \rho_I e^{-r/r_0}$, con r_0 el radio de la esfera.

Compare los resultados obtenidos con los del Problema Nº 2.

Problema Nº 6

Se tiene una distribución de cargas formada por una línea infinita de densidad uniforme λ y un plano infinito de densidad uniforme σ. La línea y el plano son perpendiculares. Halle el campo eléctrico aplicando la ley de Gauss.

Problema Nº 7 – Desarrollo multipolar

Considere una distribución de carga cuya densidad volumétrica es $\rho(x,y,z) = Kx(L-y)$ limitada a una región con forma de cubo de arista L de forma tal que $x, y, z \in [0, L]$, con K una constante.

a) ¿Cuáles son las dimensiones de K?.

b) Calcule la carga total Q, el momento dipolar $\vec{p} = p_x\hat{\imath} + p_y\hat{\jmath} + p_z\hat{k}$ y el momento cuadrupolar Q_{ij} (las parejas i, j son todas las combinaciones de a dos de las coordenadas x, y y z).

c) Escriba la expansión multipolar del potencial producido por esta distribución en un punto $\vec{r}$ alejado del origen hasta términos $O((L/r)^3)$, en función de los primeros momentos multipolares.

RESULTADOS

Se agradece comunicar a los docentes de práctico si se detectan errores.

P1) Hay sólo dos relaciones independientes.

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{q_1}{q_3}}, \qquad q_2 = -q_3\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)^2 = -q_1\left(\frac{d_2}{d_1+d_2}\right)^2$$

P2)

$$a)\ V(z) = \frac{\lambda a}{2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{1/2}}, \qquad b)\ V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[(a^2+z^2)^{1/2} - |z|\right]$$

$$c)\ V(r) = \begin{cases} \dfrac{\sigma a}{\varepsilon_0} & r<a \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{a^2}{r} & r>a \end{cases}, \qquad d)\ i.\ V(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} & r<a \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & r>a \end{cases}, \qquad d) ii. W = q\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$$

P3) La fuerza sobre la carga es: $\vec{F}_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q\left[\frac{3pc}{r^3}\hat{e}_r - \frac{p}{r^3}\hat{k}\right] = -\vec{F}_p$

El momento sobre el dipolo es: $\vec{M}_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qp}{r^2} sen\theta\hat{e}_\varphi$

P4) a) i. $V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{x^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4qd^2}{x^3}$

ii. Carga puntual q; dipolo $p_x = qd$

b) Carga neta $\sum_i q_i = q$, momento dipolar: $\sum_i q_i\vec{r}_i = qd\hat{\imath}$. Nota: el momento dipolar depende del origen porque la carga neta es no nula.

P5)

$$a)\ E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, \quad b)\ E(r) = \begin{cases} 0 & r<R \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 & r>R \end{cases}, \quad c)\ \vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z>0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k} & z<0 \end{cases}$$

$$d)\ i.\ E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} & r<R \\ \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2} & r>R \end{cases}, \quad ii. E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_I}{\varepsilon_0 r^2}\left[2r_0^3 - (r_0 r^2 + 2r_0^2 r + 2r_0^3)e^{-r/r_0}\right] & r<r_0 \\ \dfrac{\rho_I r_0^3}{\varepsilon_0 r^2}(2-5e^{-1}) & r>r_0 \end{cases}$$

P6) $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\hat{e}_r + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{k}$

P7)

$$a)\ Q = \frac{KL^5}{4}; \vec{p} = KL^6\left(\frac{1}{6}\hat{\imath} + \frac{1}{12}\hat{\jmath} + \frac{1}{8}\hat{k}\right); \ [Q_{ij}] = KL^7\begin{bmatrix} 1/8 & 1/6 & 1/4 \\ 1/6 & -1/8 & 1/8 \\ 1/4 & 1/8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b)\ \varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{KL^5}{4}\frac{1}{r} + \frac{KL^6}{2}\frac{1}{r^3}\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{4}\right) + \frac{KL^7}{2}\frac{1}{r^5}\left(\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} + \frac{xy}{3} + \frac{xz}{2} + \frac{yz}{4}\right)\right]$$