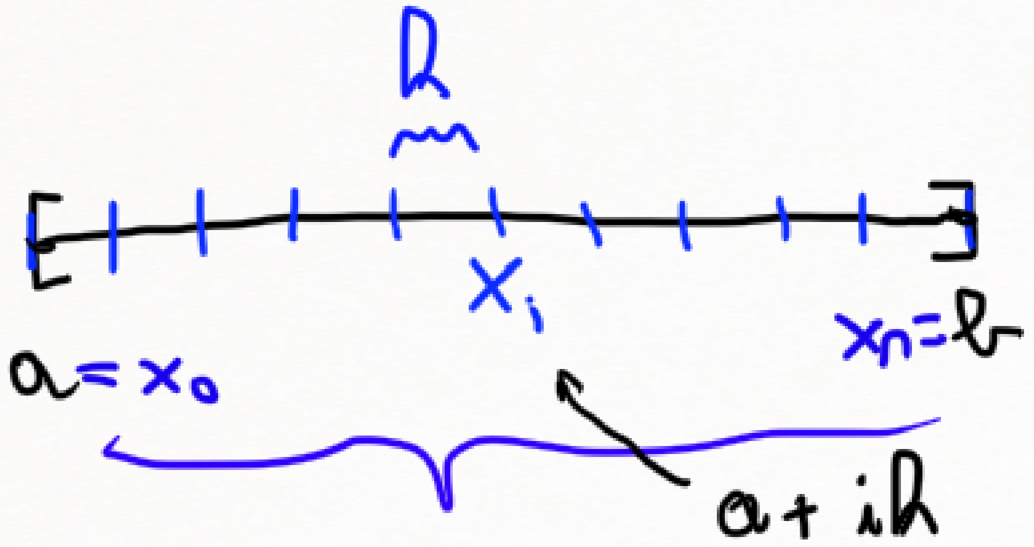
$$y'' + 3y' - y = x^2 \quad \text{CDIVV}$$

$$y'' + \overset{g}{e^{x^2}}\, y = \overset{F}{\boxed{\cos(x)}}$$ no sale con el método de CDIVV

pero con este ejercicio podemos aproximar la solución.

$$\begin{cases} y''(x) + g(x)\,y(x) = F(x) \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \end{cases} \qquad y : [a, b] \to \mathbb{R}$$



N subintervalos de largo $\frac{b-a}{N} = h$

Nuestras incógnitas van a ser los valores de $y(x)$ en los puntos x_i de la partición.

incógnitas: $y_i \in \mathbb{R}$ $\quad i = 0:N \quad$ $y_i \approx y(x_i)$

por las condiciones iniciales $y_0 = \alpha \quad y_N = \beta$

$y_i \; i = 1:N-1 \quad$ N-1 incógnitas (los puntos del medio)

b) $\Delta_a(h) = \dfrac{f(a-h) \cancel{-2f(a)} + f(a+h)}{h^2}$ estimador de $f''(a)$ $\left(\text{análogo a } \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}\right)$

voy a usar Taylor de orden 4:

$$f(a+h) = \cancel{f(a)} + \cancel{f'(a)h} + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \cancel{\frac{1}{3!}f^{(3)}(a)h^3} + \frac{1}{4!}f^{(4)}(c)h^4 \qquad c \in [a, a+h]$$

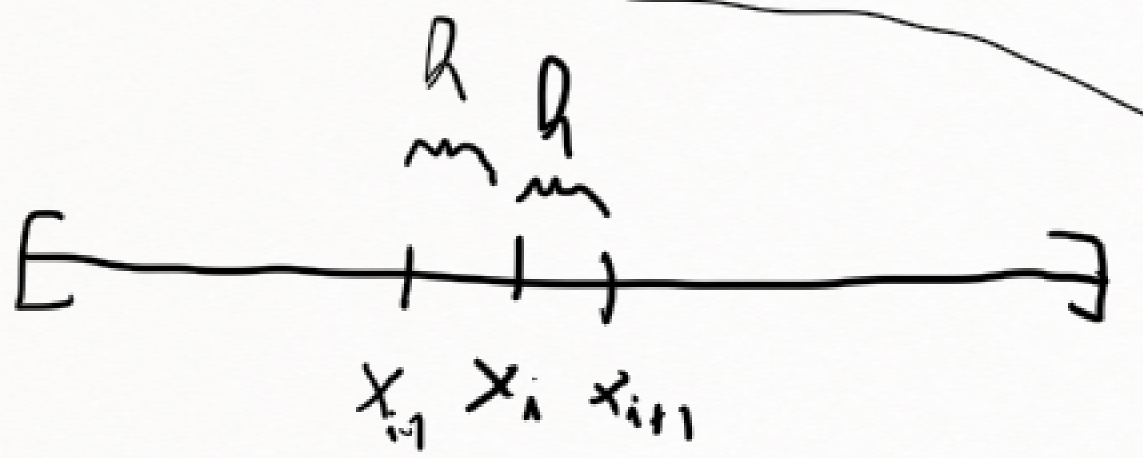
$$f(a-h) = \cancel{f(a)} \underbrace{- \cancel{f'(a)h}}_{f'(a)(-h)} + \underbrace{\frac{1}{2}f''(a)h^2}_{\frac{1}{2}f''(a)(-h)^2} - \cancel{\frac{1}{3!}f^{(3)}(a)h^3} + \frac{1}{4!}f^{(4)}(c')h^4 \qquad c' \in [a-h, a]$$

$$\Delta_a(h) = \frac{\frac{1}{2}f''(a)h^2 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(c)h^4 + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(c')h^4}{h^2} = f''(a) + \frac{1}{4!}\left(f^{(4)}(c) + f^{(4)}(c')\right)h^2$$

$$|\Delta_a(h) - f''(a)| = \frac{1}{4!}\left|f^{(4)}(c) + f^{(4)}(c')\right|h^2 \underset{C^4}{\approx} \frac{2}{4}\left|f^{(4)}(a)\right|h^2$$ ✓ error de truncamiento $O(h^2)$

$$y''(x_i) \approx \frac{y(x_i - h) - 2y(x_i) + y(x_i + h)}{h^2} = \frac{y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})}{h^2}$$

$$\approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$



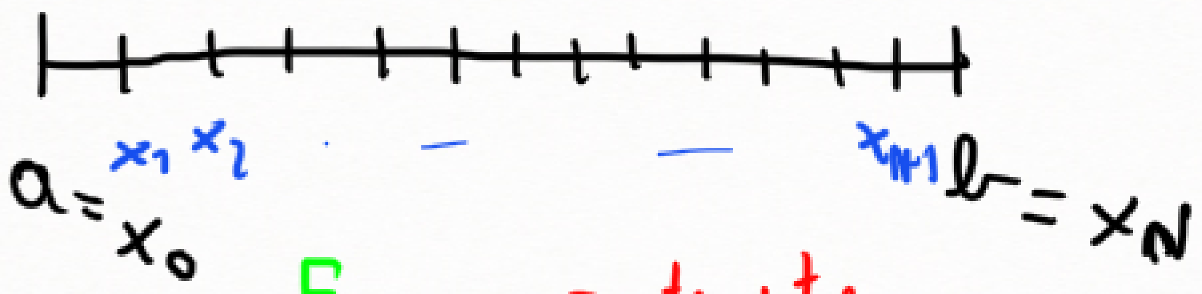
$x_{i+1} - x_i = h \Rightarrow x_i + h = x_{i+1}$

$x_i - x_{i-1} = h \Rightarrow x_i - h = x_{i-1}$

$$\Rightarrow \boxed{y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}}$$

$$y''(x) + \overbrace{g(x)}\, y(x) = \overbrace{F(x)}^{\text{conocidas}} \qquad (E)$$

Para el sistema de ecuaciones vamos a imponer (E) en los puntos x_i $\; i=1,\dots,N-1$



$y_0 = \alpha \qquad y_N = \beta$

$$y''(x_i) + \overbrace{g(x_i)}^{g_i}\, y(x_i) = \overbrace{F(x_i)}^{F_i} \qquad \overbrace{y''(x_i)}^{\text{parte anterior}} + g_i \overbrace{y(x_i)}^{y_i} = F_i$$

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + g_i y_i = F_i \iff y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + g_i h^2 y_i = h^2 F_i$$

$$\iff \left\{ \underline{y_{i-1}} + \overbrace{(g_i h^2 - 2)}^{\text{números conocidos}}\, \underline{y_i} + \underline{y_{i+1}} = \overbrace{F_i}\, h^2 \right. \qquad \text{ecuación lineal}$$

incógnitas

Llegamos a un sist. de ecuaciones $(N-1)\times(N-1)$

Una de estas ecuaciones para cada $i = 1, N-1$ $\Rightarrow$ $N-1$ ecuaciones lineales
$N-1$ incógnitas

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1}) \qquad y_0 = \alpha \qquad y_N = \beta$$

no incógnita

1) $\overline{y_0} + (g_1 h^2 - 2) y_1 + y_2 = F_1 h^2 \;\rightarrow\; (g_1 h^2 - 2) y_1 + y_2 = F_1 h^2 - \alpha$

$y_0 = \alpha$

incógnitas

2) $\overline{y_1} + (g_2 h^2 - 2) \overline{y_2} + \overline{y_3} = F_2 h^2$

$\vdots$

no incógnita

N-1) $y_{N-2} + (g_{N-1} h^2 - 2) y_{N-1} + \overline{y_N} = F_N h^2 \;\rightarrow\; y_{N-2} + (g_{N-1} h^2 - 2) y_{N-1} = F_N h^2 - \beta$

$y_N = \beta$

$$Ay = b$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & & y_{N-1} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} g_1 h^2 - 2 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & g_2 h^2 - 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & g_3 h^2 - 2 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g_{N-1} h^2 - 2 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 h^2 - \alpha \\ F_2 h^2 \\ F_3 h^2 \\ \vdots \\ F_{N-1} h^2 - \beta \end{pmatrix} = b$$

$y : [0,5] \to \mathbb{R}$ $\quad y(0) = 0 \quad y(5) = \text{sen}(5)$

$$y''(x) + e^x y(x) = \text{sen}(x)\,(e^x - 1)$$

sol exacta: $y(x) = \text{sen}(x)$

Normas $\rightarrow$ vectoriales

Normas $\rightarrow$ matriciales

normas vectoriales

$v = [v_1, \dots, v_n]$ $\quad \|v\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |v_i| \quad \left(= \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^1 \right)^{1/1} \right) \quad \|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 \right)^{1/2}$

con cualquier $p \geq 1$ $\quad \|v\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{1/p}$

$\|v\|_\infty := \max_{i=1:n} |v_i|$

normas matriciales

Normas matriciales

$(Ax = b)$

Definimos normas que miden cómo multiplicar por la matriz estira o achica vectores.

Def (Norma operador) (operador $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ consideramos A como $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $T(v) = Av$)

Sea $\|\cdot\|_v$ una norma vectorial. La norma operador asociada $\|\cdot\|_v$ es.

$$\|A\| := \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

tamaño desp de multiplicar por A

$\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$: el cociente mide qué tanto multiplicar por A estira o achica al vector x

tamaño antes

$\|A\|$ es lo máximo que multiplicar por la matriz estira a un vector (considerando $\|\cdot\|_v$)

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \max_{x \neq 0} \left\|A \frac{x}{\|x\|_v}\right\| = \max_{\substack{e \in \mathbb{R}^n \\ \|e\|_v = 1}} \|Ae\|_v$$

vector unitario $\left\|\frac{x}{\|x\|_v}\right\| = 1$

1) compatibilidad con $\|\cdot\|_v$

$\|Ax\|_v \leq \|A\| \, \|x\|_v$

2) submultiplicatividad

$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

Def: Número de condición. Depende de una norma operador que elegimos. $\|\cdot\|$.

$$\kappa(A) := \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

Obs: Por submultiplicatividad $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

para cualquier norma operador $\max\limits_{\|x\|=v} \|Ax\|_v$

$$\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|Id\| = 1 \implies \kappa(A) \geq 1$$

- Al resolver $Ax = b$ hay errores.

$\kappa(A)$ nos permite saber qué tanto error se comete al resolver el sist.

$\kappa(A) \approx 1$ ✓ los errores van a ser chicos

$\kappa(A)$ grande los errores pueden ser grandes

(10) $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ Hallar $\|D\|$ para las normas vectoriales $\| \|_1$, $\| \|_2$ y $\| \|_\infty$

Sea k el índice en que se da el máximo $|d_i|$ $\quad \max_{i=1:n} |d_i| = |d_k|$

Vamos a demostrar $\|D\| \leq |d_k|$ y $|d_k| \leq \|D\|$.

$\|D\| \leq |d_k|$: sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ tq $\|x\|_v = 1$ (ya sea $\| \|_1$, $\| \|_2$ o $\| \|_\infty$)

$$\|Dx\|_v = \|(d_1x_1, d_2x_2, \dots, d_nx_n)\|_v \overset{*}{\leq} \|(d_kx_1, d_kx_2, \dots, d_kx_n)\|_v = \|d_k x\|_v = |d_k| \overbrace{\|x\|_v}^{=1}$$

$\Rightarrow \|Dx\|_v \leq |d_k| \ \forall x$ de $\|x\|_v = 1$

$\Rightarrow \|D\| = \max_{\|x\|_v = 1} \|Dx\|_v \leq |d_k|$

$*$ si ℓ_p: $\|(d_1x_1, d_2x_2, \dots, d_nx_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^n \underbrace{|d_i|^p}_{\leq |d_k|} |x_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |d_k|^p |x_i|^p\right)^{1/p} = \|(d_kx_1, \dots, d_kx_n)\|_p$

∞: $\|(d_1x_1, \dots, d_nx_n)\| = \max_i \overset{\leq |d_k|}{|d_i|} |x_i| \leq \max_i |d_k||x_i| = \|(d_kx_1, \dots, d_kx_n)\|_\infty$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} \qquad \max_{i=1:n} |d_i| = |d_k|$$

$\underline{|d_k| \leq \|D\|}$: $\|D\| = \max_{\|x\|_v = 1} \|Dx\|_v$. Alcanza hallar un x_p con $\|x\|_v = 1$ tq $\|Dx\|_v = |d_k|$

lugar k

$x_p = (0, 0, \ldots, 1, 0 \ldots 0)$

$\|x_p\|_v = 1$

para cualquier norma l_p o la ∞.

$$\|Dx_p\|_v = \|(0, 0 \ldots, d_k, 0 \ldots 0)\| = \|d_k \overbrace{(0, 0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0)}^{x_p}\|$$

$$= |d_k| \underbrace{\|x_p\|}_{1} = |d_k|$$

$\Rightarrow$ Como probamos las dos desig, $\|D\| = |d_k| = \max_{1=1:n} |d_i|$

$$\|D\| = \max_{i=1:n} |d_i| \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots d_n \end{pmatrix}$$

$d_i \neq 0$ sino no es invertible.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_i^{-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\|D^{-1}\| = \max_{i=1:n} \frac{1}{|d_i|} = \frac{1}{\min_{i=1:n} |d_i|}$$

tb es diagonal

$$K(D) = \|D\|\,\|D^{-1}\| = \frac{\overbrace{\max_i |d_i|}^{\|D\|}}{\underbrace{\min_j |d_j|}_{\|D^{-1}\|}} \quad \frac{1}{}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$K(D) = \frac{5}{2}$$