Teórico. $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h \to 0} f'(a)$

Ej 6: algo similar $\dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \xrightarrow{h \to 0} f'(a)$

$0 \neq 2,75 \times 10^7$ $\quad$ $0 \neq 1,47 \times 10^{-4}$

27500000 $\quad$ 0,000147

$75 = 64 + 8 + 2 + 1$

base 2: $1001011 = 1,\underline{001011} \times 2^6$ $\quad$ $\neq 0$

Punto flotante con 64 bits:

- 1 bit signo s
- 52 bits mantisa f
- 11 bits exponente e

signo

$$(-1)^s (1+f) \times 2^e$$

$f \rightarrow$ puede ser 2^{52} números $\neq$

$0 \leq f < 1$

0 $\quad$ 1

$0, \frac{1}{2^{52}}, \frac{2}{2^{52}}, \ldots, \frac{i}{2^{52}}, \ldots, \frac{2^{52}-1}{2^{52}} = 1 - \frac{1}{2^{52}}$

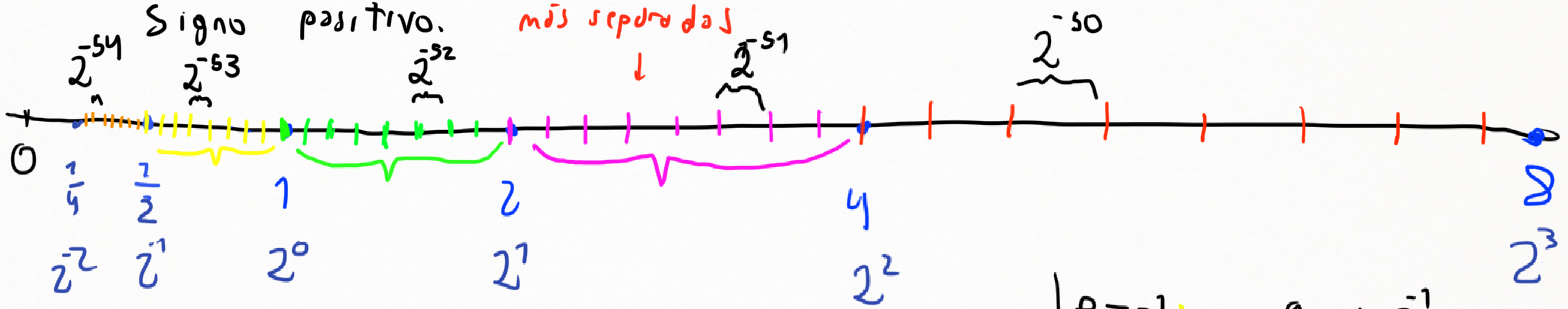
$(2^{50} = (2^{10})^5 \sim 1000^5 = 1000000000000000)$

$e \rightarrow$ puede ser $2^{11} = 2048$ núm $\neq$

$-1022 \leq e \leq 1023$ (total son 2046)

- $e = 1024$ se reserva para otras cosas
- $e = -1023$ se reserva para otras cosas

InF, NaN, desnormalizados/subnormales, $\pm$cero más denso: $\left[\frac{1}{2^{1023}}, \frac{1}{2^{1022}}\right)$



$e=0$: $x = (1+F)\cdot 2^0 = 1+F$

$\Longrightarrow \quad 1 \leq x < 2$

$2^0 \leq x < 2^1$

$1, 1+\frac{1}{2^{52}}, 1+\frac{2}{2^{52}}, \dots, 1+\frac{2^{52}-1}{2^{52}} = 2-\frac{1}{2^{52}}$

2^{52} números equiespaciados con distancia $\frac{1}{2^{52}}$ entre cada uno y el siguiente.

$e=1$: $x = (1+F)\cdot 2 = 2+2\cdot F$

$\Longrightarrow \quad 2 \leq x < 4$

$2^1 \leq x < 2^2$ $\qquad 2-\frac{1}{2^{51}}$

$2, 2+\frac{1}{2^{51}}, 2+\frac{2}{2^{51}}, \dots, 2+\frac{2^{52}-1}{2^{51}} = 4-\frac{1}{2^{51}}$

2^{52} números equiespaciados con distancia $\frac{1}{2^{51}}$ entre ellos $\left(\frac{1}{2^{51}} = 2\cdot\frac{1}{2^{52}}\right)$

$e=-1$: $x = (1+F)\cdot 2^{-1}$

$= 2^{-1} + 2^{-1}\cdot F$

$2^{-1} \leq x < 1$ $\qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{2^{53}}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2^{53}}, \dots, \frac{1}{2}+\frac{2^{52}-1}{2^{53}} = 1-\frac{1}{2^{53}}$

2^{52} números equiespaciados

separación $\frac{1}{2^{53}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{52}}$

espacio total $2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$

$$\text{espaciamiento} = \frac{2^n}{2^{52}} = 2^{n-52}$$

números $\sim 2^n$

$$\frac{\text{"magnitud de los números"}}{\text{espaciamiento}} = \frac{2^n}{2^{n-52}} = 2^{52}$$

$$F(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

$y \sim 0$ $$F(y) = \underbrace{\sqrt{y^2+1}}_{\sim 1} - \underbrace{y}_{\sim 0} \sim 1$$

z grande $$F(z) = \sqrt{z^2+1} - z$$

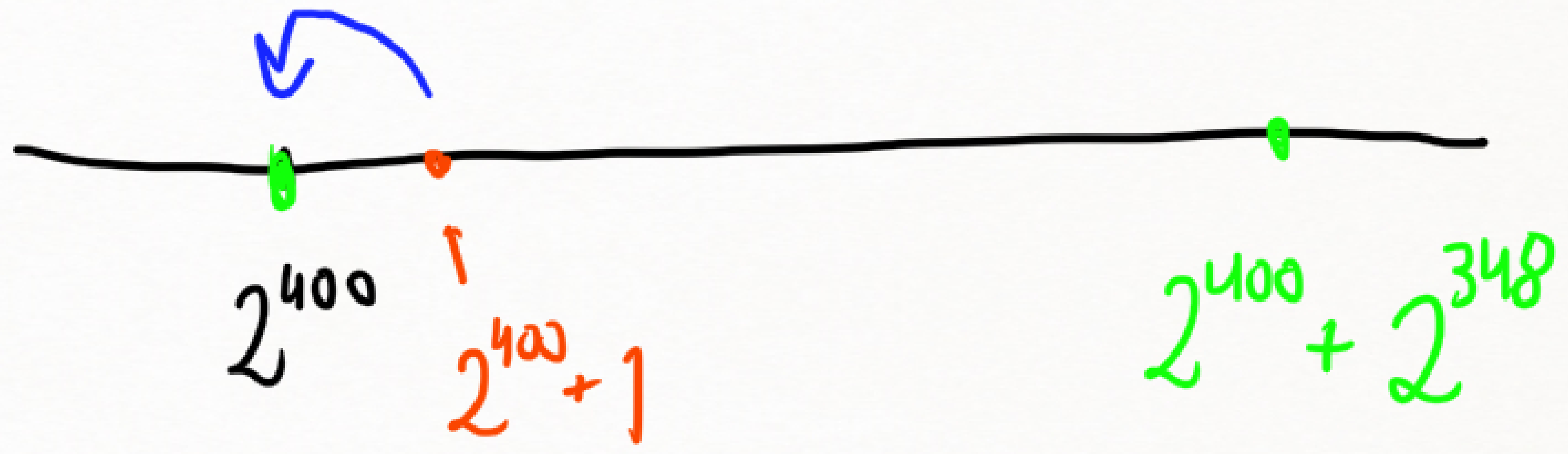
$$\underbrace{z^2+1}_{\text{grande}} \underset{\text{punto flotante}}{=} z^2$$

$$z = 2^{200}$$

$$\Rightarrow z^2 = 2^{400}$$

$$F(z) = \sqrt{z^2+1} - z \overset{PF}{=} \sqrt{z^2} - z = 0$$

números representables punto flotante



$$[2^{400}, 2^{401})$$

espaciamiento $$2^{400-52} = 2^{348}$$

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{x^2+1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

con esta forma da bien

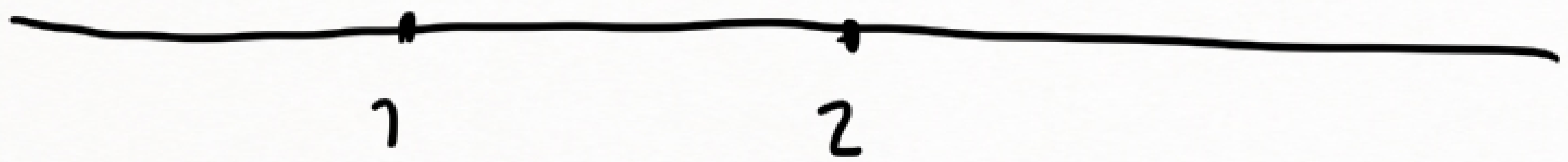
2 $\qquad \pm (1+F)\,2^{e}$ $\qquad$ 1 bit s $\qquad$ 23 bit F

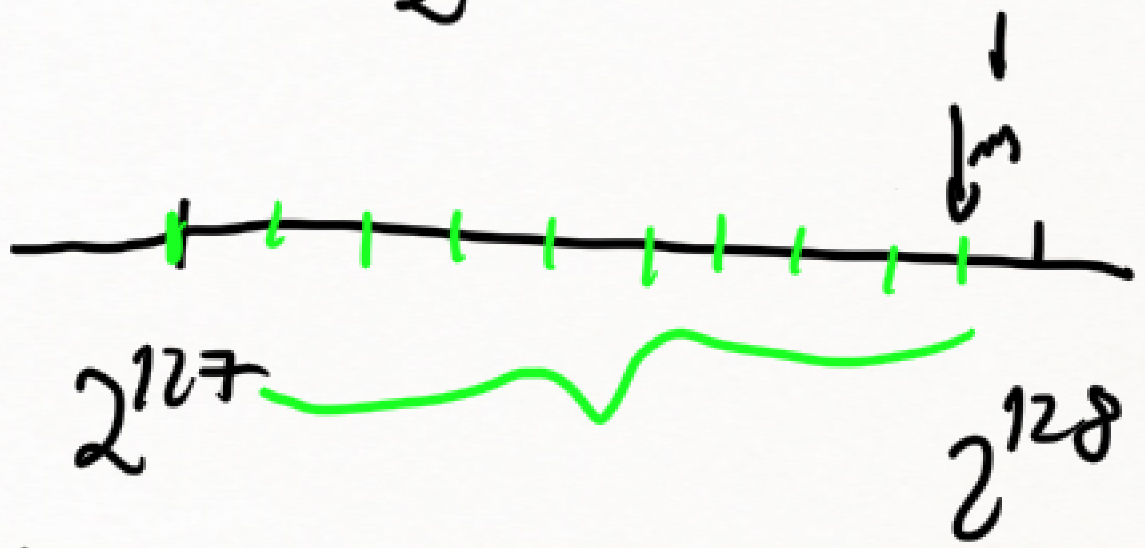
8 bit e.

Def: E épsilon de máquina ε_M es:

$$\varepsilon_M = (\text{menor número} > 1 \text{ representable}) - 1 = \text{separación entre } 1 \text{ y el siguiente}$$

$$2^{127-23} = 2^{104}$$





$$1,\ 1+\frac{1}{2^{23}},\ \dots \Longrightarrow \varepsilon_M = \frac{1}{2^{23}} \sim \frac{1}{8000000}$$

Menor representable en valor absoluto

$(1+F)\cdot 2^{e}$ ← lo más negativo posible

0

$$(1+0)\cdot 2^{-126} = 2^{-126}$$

(si tenemos en cuenta los subnormales/desnormalizados, se pueden tener números más chicos)

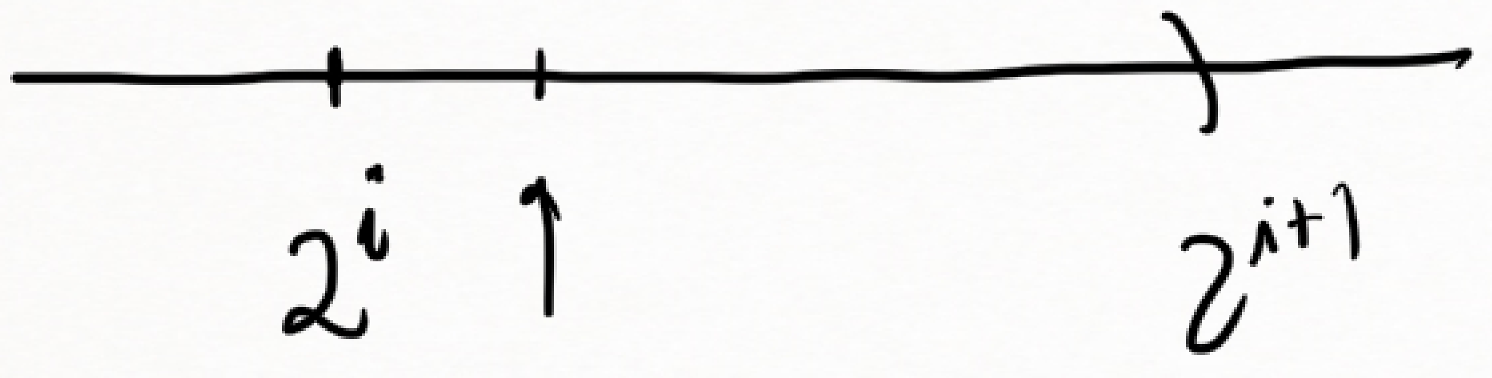
Mayor representable

$(1+F)\cdot 2^{e}$ ← lo más grande posible

más grande posible

$$\left(1+\frac{2^{23}-1}{2^{23}}\right)\cdot 2^{127} = \left(2-\frac{1}{2^{23}}\right)\cdot 2^{127} = 2^{128}-2^{104}$$

$$\varepsilon_M = \frac{1}{2^{23}}$$



distancia entre 2^i y el siguiente representable $= \dfrac{2^i}{2^{23}} = 2^i \times \varepsilon_M$

$(1+f) \times 2^i$ $\quad 2^i + \dfrac{2^i}{2^{23}}$

Separación en el intervalo $[2^i, 2^{i+1})$ $= 2^i \times \varepsilon_M$

$2^i + f \times 2^i$

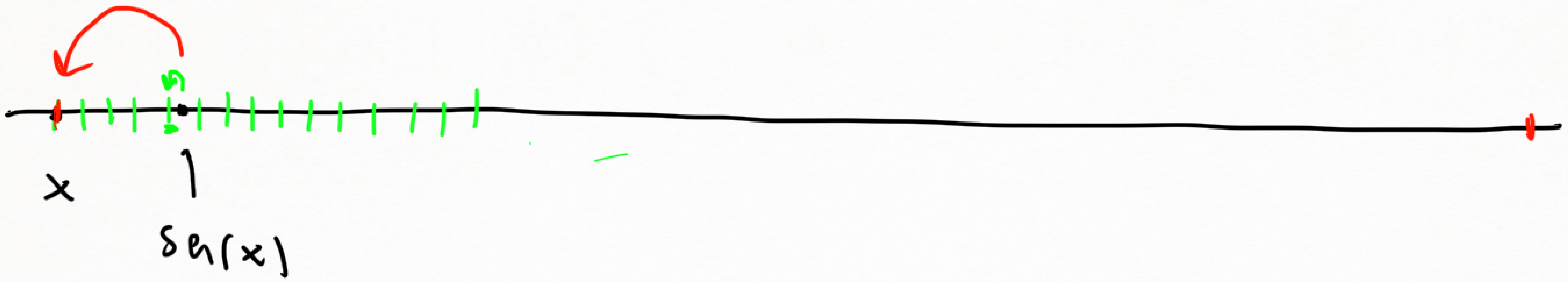
$$f = \frac{1}{2^{23}} \rightarrow 2^i + \frac{2^i}{2^{23}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - \left(x - \frac{1}{3!}x^3\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\frac{1}{3!}x^3} = 3! = 6$$

$$\operatorname{sen}(x) \cong x - \frac{1}{3!}x^3 \quad \left(+ \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \right)$$

precisión simple

$$\frac{y^3}{y - \operatorname{sen}(y)} \overset{\downarrow}{=} \frac{y^3}{y - y} = \frac{y^3}{0} = \mathrm{InF}$$



precisión doble

precisión simple