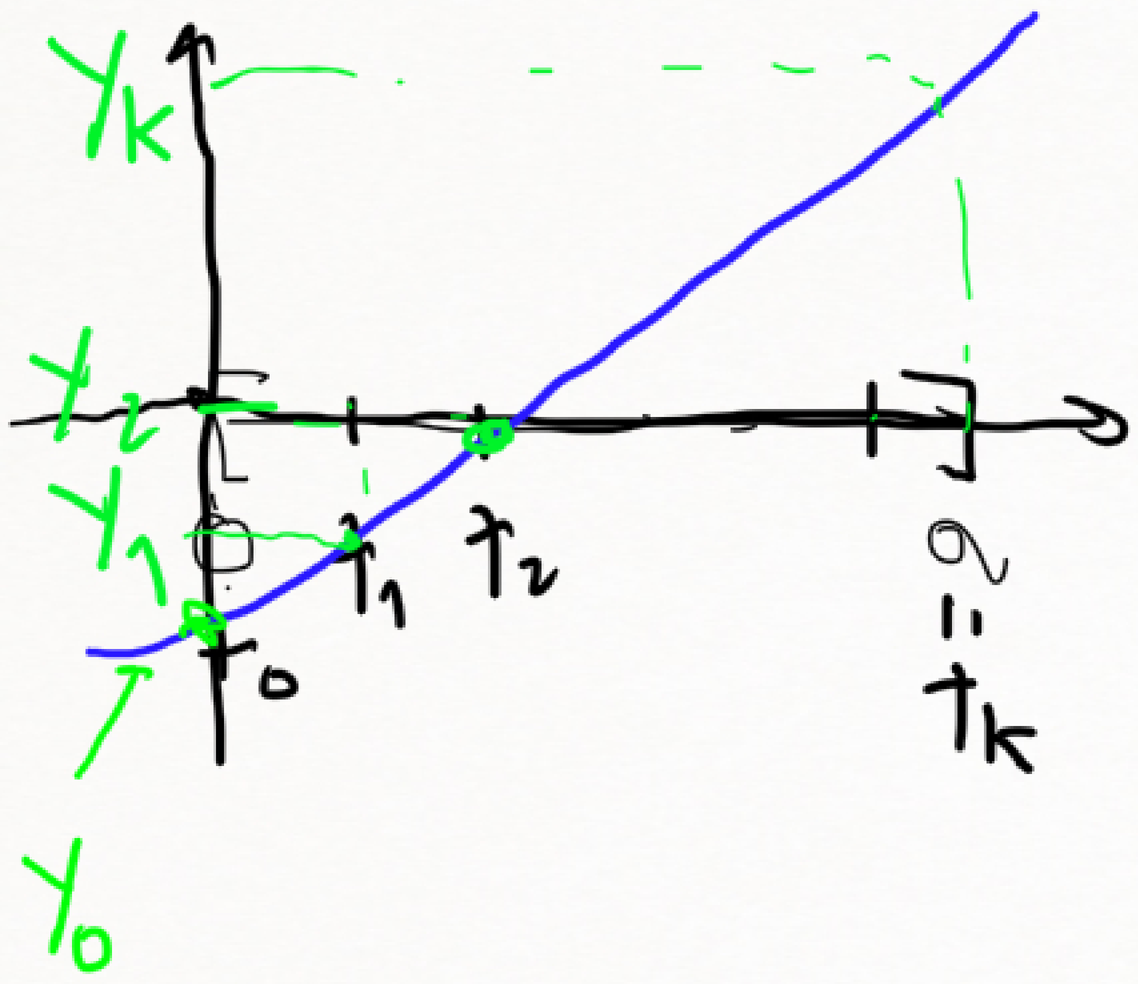
$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

La solución es una función $y : [0,a] \to \mathbb{R}^n$.

Lo que aproximarla computacionalmente es particionar el dominio $[0,a]$ $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = a$ y tratamos de aproximar los valores de la función $y(t)$ en esas tiempos t_i.

$$t_i \longleftrightarrow y_i \approx y(t_i)$$



Si tenemos en octave $t = [t_0, t_1, \ldots, t_k]$
$y = [y_0, y_1, \ldots, y_k]$

Haciendo plot(t,y) se grafica la solución que hallamos.

Ejemplo: $y'(t) = \boxed{2y(t)}$ $= F(t, y(t))$
$y(0) = 1$

sol exacta e^{2t}

$F(t,y) = 2y$

$$\begin{cases} u'' = u' + e^t v \\ v'' = e^t u + v' \end{cases}$$

Los solvers de octave aceptan ecuaciones de la forma $y' = F(t, y)$. Hay que llevarla a esa forma

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u(t) \\ \leftarrow v(t) \\ \leftarrow u'(t) \\ \leftarrow v'(t) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_3 \\ y_2' = y_4 \\ y_3' \overset{u''}{=} y_3 + e^t y_2 \\ y_4' = e^t y_1 + y_4 \end{cases}$$

(y_1, y_4, y_3, y_4)

$$F(t, y) = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_3 + e^t y_2 \\ e^t y_1 + y_4 \end{pmatrix}$$

Sup que queremos aproximar $u(1)$ $(t = 1)$

Hay que hallar un i tq $tiempos(i) \approx 1$

y ver valores$(i, 3)$

$$y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \\ y_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = y_0$$

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t)^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$ Resolver analíticamente

$$y'(t) = -y(t)^2 \Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)^2} = -1 \Rightarrow \int \underbrace{\frac{y'(t)}{y(t)^2}}\, dt = -t + C \Rightarrow \int \frac{1}{u^2} du = -t + C$$

CV $u = y(t)$

$du = y'(t)dt$

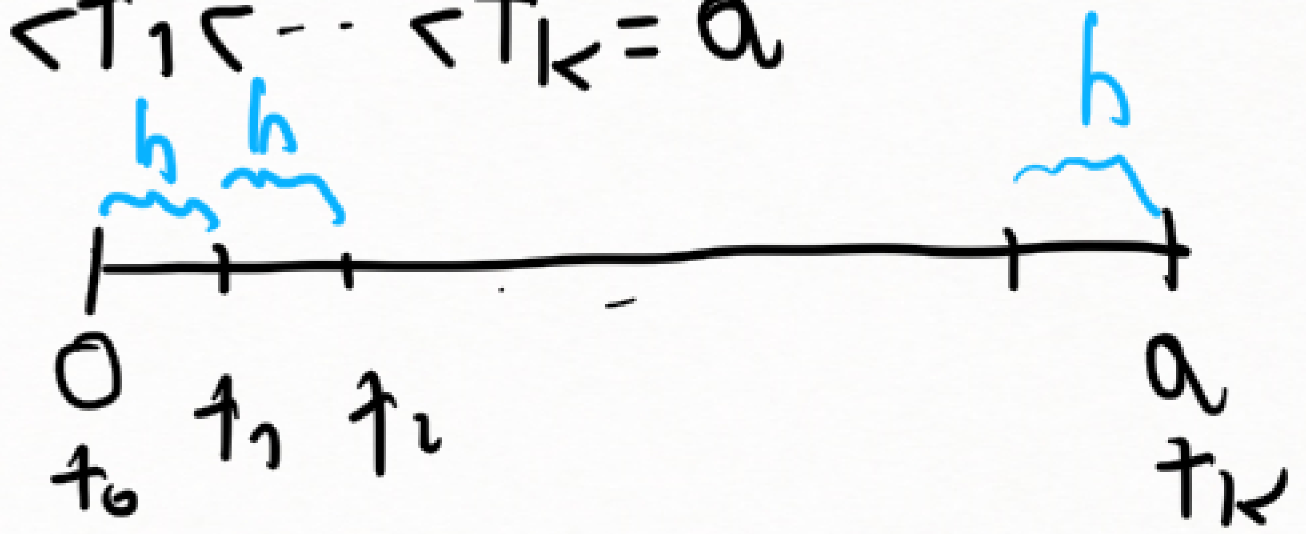
$$\Rightarrow -\frac{1}{u} = -t + C \Rightarrow \frac{-1}{y(t)} = -t + C \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{t - C}}$$ solución general

Para hallar C usamos la condición inicial. $y(0) = \frac{-1}{C} = y_0 \Rightarrow C = -y_0^{-1}$ $\boxed{y(t) = \frac{1}{t + y_0^{-1}}}$

Euler hacia adelante

Queremos aproximar $y:[0,a]\to\mathbb{R}$ $\quad 0=t_0<t_1<\cdots<t_k=a$

En este caso usamos partición equiespaciada.



$h=\dfrac{a}{k}$

Queremos hallar valores $y_0, y_1, \dots, y_k$ que aproximan la solución en los t_n $\quad y_n \approx y(t_n)$

El método de Euler se puede deducir a partir de hacer cocientes incrementales

→ $y_0 = y_0$ (dato)

$y_n \to y_{n+1}$: Tenemos la ecuación $y'(t)=F(t,y(t))$

t_{n+1}

$$y'(t_n) \approx \frac{y(t_n+h)-y(t_n)}{h} \approx \frac{y_{n+1}-y_n}{h} \Rightarrow \boxed{y_{n+1}=y_n+h\,F(t_n,y_n)}$$

recurrencia para calcular y_{n+1} en base a y_n

$$y'(t_n) = F(t_n,y(t_n)) = F(t_n,y_n)$$

En este ejercicio $y'=-y^2=F(t,y)$

$y_{n+1}=y_n-h\,y_n^2$ $\quad$ Dominio $[0,1]$

sol exacta $y(t) = \dfrac{1}{t + y_0^{-1}} = \dfrac{1}{t + \frac{1}{2}}$

$y(1) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$

$|e| \approx C h^{\alpha}$

$\log|e| = \underbrace{\log(c)}_{b} + \underbrace{\alpha}_{a} \log(h)$

datos y_i datos x_i

$h_1 = \frac{1}{10}$ $e_1 \to x_1 = \log\left(\frac{1}{10}\right)$

$y_1 = \log(e_1)$

$a x_i + b = y_i$

$h_2 = \frac{1}{20}$ $e_2 \to x_2 = \log\left(\frac{1}{20}\right)$

$y_2 = \log(e_2)$

Euler hacia atrás

Se razona similar a Euler hacia adelante, pero haciendo el cociente incremental desde y_{n+1} hacia atrás.

$y_n \to y_{n+1}$:

$$y'(t_{n+1}) \approx \frac{y_{n+1}-y_n}{h} \Rightarrow y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$$y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

aparece la incógnita también

Métodos implícitos

Para pasar de y_n a y_{n+1} hay que resolver la ecuación $y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) - y_{n+1} = 0$

incógnita

que es una ecuación no lineal

En este caso $f(t,y) = -y^2$ $\quad y_n - h y_{n+1}^2 - y_{n+1} = 0$ ecuación cuadrática que podemos resolver a mano. En general en cada paso hay que usar algún método para ecuaciones no lineales